3. Übungsblatt

Diskrete Zufallsvariablen, Binomialverteilung, geometrische Verteilung, Poisson-Verteilung

1. Eine reguläre Münze wird dreimal geworfen. Der Ergebnisraum Ω ist die Menge von 3-Tupeln mit Elementen "Kopf" oder "Zahl", die dementsprechend mit $KKK, ZKK, \ldots$ bezeichnet werden. Die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ wird folgenderwiese definiert: $X(KKK) = 0$, und der Wert von X ist der Index der ersten "Zahl" für jedes andere Ergebnis (z. B. $X(KZK) = 2$).
   (a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X ungerade ist.
   (b) Definieren wir Y genauso wie X, mit dem einzigen Unterschied, dass $Y(KKK)$ zufällig entweder den Wert 0, oder den Wert 1 annimmt. Ist Y eine Zufallsvariable auf dem Ergebnisraum Ω?
2. Werfen wir einen regulären Würfel zweimal und definieren wir die Zufallsvariable X als die Anzahl der Sechse (z.B. falls beide Augenzahlen 6 sind, gilt $X = 2$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X gerade ist?
3. Seien A, B és C drei Ereignisse, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
   $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$ $\quad \mathbb{P}(B) = 0{,}4$ $\quad \mathbb{P}(C) = 0{,}3$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}3$
   $\mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}2$ $\quad \mathbb{P}(C \cap A) = 0{,}1$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$
4. Zwei Würfel mit jeweils 10 Seiten werden geworfen. Bezeichnen wir die Ergebnisse der Würfe mit X bzw. Y. Bestimmen wir $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

---

5. In einem Geschäft werden Glühbirnen verkauft. 1% der Birnen ist fehlerhaft. Falls wir 100 Stücke kaufen,
   (a) mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens 3 fehlerhaft?
   (b*) wie viele von ihnen werden fehlerhaft mit der größten Wahrscheinlichkeit?
6. Wie oft sollen wir einen fairen Würfel werfen, wenn wir wollen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der 6-er Würfe mindestens 2 ist, nicht kleiner als 0,5 sei?
7. Wir wählen zufällig und unabhängig voneinander Punkte im Einheitsintervall. Wir wiederholen das Auswählen der Punkte, bis ein Punkt ins mittlere Drittel des Intervalls fällt. Bezeichne X die Anzahl der Punkte, die dafür notwendig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < 5)$?
8. Eine veraltete Webseite wird von 10 Microservices bedient, die unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 80% verfügbar sind. Die Funktionalität des Systems kann als optimal betrachtet werden, solange höchstens 3 Services außer Betrieb sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert die Webseite optimal?
9. Wir werfen einen regulären Würfel wiederholt, bis wir eine Zahl kleiner als 3 bekommen. Bezeichne X die Anzahl der dafür notwendigen Würfe. Welche Wahrscheinlichkeit ist höher: $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$ oder $\mathbb{P}(X \geq 3)$?
10. Wir werden eine reguläre Münze wiederholt, bis wir den zweiten Kopf bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nach dem ersten Kopf bis zum zweiten Kopf genauso viele Würfe braucht, wie bis zum ersten Kopf?
11. In einem Computerservice gibt es keine Reklamation an 2 von 20 Arbeitstagen im Durchschnitt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es an einem gegebenen Tag mindestens 3 Reklamationen gibt?
12. Beim Springreiten wirft ein Reiter die Hindernisse unabhängig voneinander mit gleichen und kleinen Wahrscheinlichkeiten ab. Es gibt viele Hindernisse im Parcours. Nehmen wir an, dass der Reiter ein Rund mit Wahrscheinlichkeit 5% fehlerfrei macht. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 3 Hindernisse in einem Rund abgeworfen werden?

13. Die Strecke eines Laufwettbewerbs führt durch ein Gebiet, wo es viele Zecken gibt. 300 Läufer fanden nach dem Wettbewerb an ihren Körpern (gerade) eine Zecke, während 75 Läufer fanden zwei Zecken. Geben wir eine Schätzung für die Anzahl der Läufer.