

3. Gyakorlat

Diszkrét valószínűségi változók, binomiális, geometriai és Poisson-eloszlás

Végeredmények és megoldások

- (a) az eseménytér elemszáma $2^3 = 8$, a valószínűségi mező pedig klasszikus. Így kedvező/összes formában számolhatók a valószínűségek.
 $\{X = 1\} = \{\text{az első jel „írás”}\} = \{IIF, III, IFI, IFF\}$, tehát $\mathbb{P}(X = 1) = 4/8 = 1/2$. Úgy is lehet érvelni, hogy az első jel ugyanolyan valószínűséggel írás, mint fej, és ha írás, akkor $\{X = 1\}$ bekövetkezik (különben pedig nem következik be).
 $\{X = 3\} = \{\text{az első két jel nem „írás”, de a harmadik igen}\} = \{FFI\}$, tehát $\mathbb{P}(X = 3) = 1/8$.
Mivel $\{X \text{ páratlan}\} = \{X = 1\} \cup \{X = 3\}$, valamint $\{X = 1\}$ és $\{X = 3\}$ kizáró események,
 $\mathbb{P}(X \text{ páratlan}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{5}{8}$.
(b) Nem valószínűségi változó, mert ha az lenne, akkor $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény lenne, azaz $Y(FFF)$ egy rögzített (további véletlentől nem függő) valós szám lenne.
- Mivel X a 6-os dobások száma két dobásból, $\text{Ran}(X) = \{0, 1, 2\}$. Így $\mathbb{P}(X \text{ páros}) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 2\}) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\text{egyszer sem dobunk hatost}) + \mathbb{P}(\text{mindkétszer hatost dobunk}) = \frac{25}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{18}$. (Itt felhasználtuk, hogy a $\mathbb{P}(\text{egyszer sem dobunk hatost})$ és a $\mathbb{P}(\text{mindkétszer hatost dobunk})$ valószínűségeket már kiszámoltuk, pl. a múltkori feladatsor 17. feladatában.)
- A $\{0 < Y < 3\}$ esemény, azt jelenti, hogy az A, B, C események közül legalább egy bekövetkezik, de nem mindegyik, azaz az $A \cup B \cup C \setminus A \cap B \cap C$ esemény valószínűségét keressük:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C \setminus A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

A három eseményre vonatkozó Poincaré-formula alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= 0,5 + 0,4 + 0,3 - 0,3 - 0,2 - 0,1 + 0,1 = 0,7 \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \mathbb{P}(0 < Y < 3) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,7 - 0,1 = 0,6$$

$$\{Y = 0\} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

Ezért $p_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - 0,7 = 0,3$, használva az unió fent kiszámolt valószínűségét.

$$\{Y = 3\} = A \cap B \cap C \implies p_Y(3) = \mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,1$$

$\{Y = 2\} = A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap C$ Mivel ezek kizáró halmazok, ezért az unió valószínűsége a valószínűségek összege, azaz $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C}) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B \cap C)$. A jobboldalon szereplő valószínűségeket megkapjuk, ha a kettősmetszet valószínűségéből kivonjuk a hármasmetszet valószínűségét, azaz

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,1 - 0,1 = 0$$

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

$$\text{Így tehát } p_Y(2) = \mathbb{P}(Y = 2) = 0,2 + 0 + 0,1 = 0,3$$

Tekintve, hogy Y lehetséges értékei a 0, 1, 2 és a 3, és egyszerre pontosan egy értéket vesz fel ezek közül, így annak a valószínűségét, hogy $\{Y = 1\}$, megkaphatjuk, ha az 1-ből kivonjuk az összes többi lehetséges érték valószínűségét.

$$\text{Így tehát } p_Y(1) = 1 - p_Y(0) - p_Y(2) - p_Y(3) = 0,3$$

- Az eseményteret modellezzük az $\Omega := [10]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$ halmazzal (és legyen $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$). Ekkor minden $(x, y) \in \Omega$ kimenetelre $X(x, y) = x$ és $Y(x, y) = y$. Így tehát

$$\{X \leq Y\} = \{(x, y) \in \Omega \mid X(x, y) \leq Y(x, y)\} = \{(x, y) \in \Omega : x \leq y\}.$$

A kedvező kimenetek tehát azok az (x, y) -ok, ahol $x \leq y$. Ha $x = 1$, akkor 10 lehetőség van: $(1, 1), \dots, (1, 10)$, ha $x = 2$, akkor 9 lehetőség: $(2, 2), \dots, (2, 10)$, és így tovább, ha $x = 10$, akkor 1 lehetőség van: $(10, 10)$. Így tehát $10 + 9 + \dots + 1 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ kedvező eset van, az összes eset száma pedig $10^2 = 100$, és a valószínűségi mező klasszikus, így $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$ a keresett valószínűség.

Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy mivel X és Y két független kockadobás eredménye, X és Y szerepe teljesen szimmetrikus, ezért $\mathbb{P}(X \leq Y)$ -nak és $\mathbb{P}(Y \leq X)$ -nek azonos valószínűségűnek kell lennie (itt fontos a kísérletek függetlensége és a két változó súlyfüggvényének egyenlősége is, bármelyik elhagyásával elromolhat az egyenlőség!). Emiatt a Poincaré-formula szerint

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cup \{Y \leq X\}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq Y) + \mathbb{P}(Y \leq X) - \mathbb{P}(\{X \leq Y\} \cap \{Y \leq X\}) = 2\mathbb{P}(X \leq Y) - \mathbb{P}(X = Y). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{(1, 1), (2, 2), \dots, (10, 10)\}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, az előbbi egyenletből $\frac{11}{10} = 2\mathbb{P}(X \leq Y)$ és így $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{11}{20}$ következik. A módszer előnye, hogy csak az $\{X = Y\}$ esemény számosságát kell meghatározni (ami igen egyszerű) az $\{X < Y\}$ számossága helyett.

Ugyanez úgy is működik, hogy Ω -t az $\{X < Y\}$, $\{X = Y\}$ és $\{Y < X\}$ események uniójára bontjuk fel. Ezek teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X)$ az előzőekhez hasonlóan, valamint $\{X \leq Y\} = \{X < Y\} \cup \{X = Y\}$ (ami két kizáró esemény uniója). $\{X = Y\}$ elemszámát ekkor is meg kell határozni, viszont nem kell a Poincaré-formula.

5. a) Feltehetjük, hogy az egyes izzók egymástól nagyjából függetlenül és azonos valószínűséggel hibásak, így mivel 100-ból átlagosan 1 db hibás, a hibás izzók számát modellezhetjük binomiális eloszlással $n = 100$ és $p = 0,01$ paraméterekkel. Így a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 3) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) \\ &= 0,99^{100} + 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{98} + \binom{100}{3} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{97} \approx 0,9816. \end{aligned}$$

(b*) Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbb{P}(X = 1) > \mathbb{P}(X = 0)$. Mivel 100-ból átlagosan 1 izzó hibás, jó tipp lehet azt gondolni, hogy a legnagyobb valószínűséggel 1 izzó lesz rossz. Ezt most be is bizonyítjuk.

1. (egyszerű, de csak a konkrét példában alkalmazható) megoldás. $\mathbb{P}(X = 0) = 0,99^{100} \approx 0,3660$, $\mathbb{P}(X = 1) = 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99^{99} \approx 0,3697$, $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{100}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{98} \approx 0,1849$. E közül a három valószínűség közül a $\mathbb{P}(X = 1)$ a legnagyobb, és a három összege nagyobb, mint 0,9, így $\mathbb{P}(X = k) < 0,1$, ha $k > 2$. Tehát $\mathbb{P}(X = 1)$ a legnagyobb valamennyi $\mathbb{P}(X = k)$ ($k = 0, 1, \dots, 100$) közül.

2. (általános n -re és p -re is általánosítható) megoldás. Ellenőrizzük, hogy milyen $k \in \{0, 1, \dots, 99\}$ esetén lesz $\mathbb{P}(X = k + 1) \geq \mathbb{P}(X = k)$. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$1 \leq \frac{\mathbb{P}(X = k + 1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{\binom{100}{k+1} 0,01^{k+1} 0,99^{100-k-1}}{\binom{100}{k} 0,01^k 0,99^{100-k}} = \frac{0,01}{0,99} \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot (100-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+1)} = \frac{1}{99} \frac{100 - k}{k + 1},$$

azaz

$$99(k + 1) \leq 100 - k,$$

vagyis $k \leq 1/100$. Így $k \geq 1$ esetén már $\mathbb{P}(X = k)$ nagyobb, mint $\mathbb{P}(X = k + 1)$, ezért $k = 1$ izzó lesz rossz a legnagyobb valószínűséggel.

6. Legyen az X valószínűségi változó a dobott hatosok száma. Ha a dobások száma n , akkor $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{6})$. Az n paramétert úgy kell megválasztanunk, hogy $\mathbb{P}(X \geq 2) \geq 0.5$.

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

A képletbe az n helyére 9-et helyettesítve még egy 0.5 alatti valószínűséget kapunk, viszont $n = 10$ -re már 0.5-nél nagyobb, így a válasz 10.

Megjegyzés: A $\mathbb{P}(X < 2)$ valószínűség n -ben valóban szigorúan monoton csökken, ugyanis ha az első $n+1$ dobásból 2-nél kevesebb hatos van, akkor azon belül az első n dobásból is. Ezt a monotonitást persze analitikus módszerekkel is ellenőrizhetjük (a $\mathbb{P}(X < 2)$ -re kapott fenti képlet n szerinti deriválásával).

7. Legyen X a nem működő service-ek száma. Mivel a feladat szerint az egyes service-ek egymástól függetlenül 0,2 valószínűséggel nem működnek, X binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0,2$ paraméterrel. A keresett valószínűség ezért

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = 0,8^{10} + 10 \cdot 0,2 \cdot 0,8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,8791.$$

(A feladat természetesen úgy is megoldható, hogy a működő service-ek számát elnevezzük Y -nak, ekkor $Y = 10 - X$ binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0,8$ paraméterekkel, és a $\mathbb{P}(Y \geq 7)$ valószínűséget keressük. A számolás érdemben nem változik, $\binom{10}{k} = \binom{10}{n-k}$.)

8. Egy véletlen kísérletet, - most az egységintervallumban való véletlen pontválasztást, - addig ismételünk, amíg egy kívánt esemény, - most az, hogy a középső harmadába esik az intervallumnak a pont, - be nem következik. A szükséges kísérletek száma geometriai eloszlású. Az eloszlás paraméterét a kívánt esemény valószínűsége adja. Ez a valószínűség most $\frac{1}{3}$, így $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$ paraméterű geometriai eloszlású. X lehetséges értékei a pozitív egész számok, ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 5) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27 + 18 + 12 + 8}{81} = \frac{65}{81} \approx 0,8025. \end{aligned}$$

9. X geometriai eloszlású, mivel azt adja meg, hogy hányszor kell megismételni egy véletlen kísérletet addig, amíg be nem következik egy adott esemény. Itt akkor sikeres egy kísérlet, ha 3-nál kisebb számot, azaz 1-et vagy 2-t dobunk a szabályos dobókockával. Ennek az eseménynek a valószínűsége $1/3$, ezért $X \sim \text{Geo}(1/3)$.

$$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

Ezért tehát $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3) < \mathbb{P}(X \geq 3)$

10. Jelölje X az első fejjé és Y az első fej után a második fejjé szükséges dobások számát. Ekkor a $\mathbb{P}(X = Y)$ valószínűséget kell meghatározni. X és Y is $\text{Geo}(1/2)$ eloszlásúak, mivel mindkét valószínűségi változó azt adja meg, hogy hányadikra sikerül először egy-egy függetlenül megismételt, kísérletenként $p = 1/2$ valószínűséggel sikeres kísérlet. Vegyük észre, hogy ha az $\{X = Y\}$ esemény bekövetkezik, akkor az $\{X = Y = k\}$ esemény is bekövetkezik valamilyen $k \in \{1, 2, \dots\}$ -ra; az $\{X = Y = k\}$ események páronként kizáróak és uniójuk megegyezik az $\{X = Y\}$ eseménnyel. Ezért

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}).$$

Tetszőleges k esetén az $\{X = k\}$ és az $\{Y = k\}$ események függetlenek, hiszen a kísérleteket egymástól függetlenül ismételjük és így az, hogy az első fejjé hány dobás kellett, nem befolyásolja azt, hogy az első fej után a második fejjé még hány dobás kell. Ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{k-1} \Big|_{p=1-p=1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

A kapott végtelen összeget olyan alakra hozzuk, hogy a végtelen mértani sor összegképletét tudjuk használni, így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \stackrel{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{l+1} = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^l = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

adódik a keresett valószínűségre.

11. Jelölje X az egy adott napon beérkező reklamációk számát. A kért valószínűség: $\mathbb{P}(X \geq 3)$, a feladat szövegéből $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{20} = 0,1$. Mivel egy λ paraméterű Poisson-eloszlás 0. tagja $p_0 = e^{-\lambda}$, ezért esetünkben ennek a kifejezésnek az értéke 0,1. Innen λ -t kifejezhetjük: $\lambda = -\ln 0,1 = \ln 10$

Figyelembe véve, hogy a Poisson-eloszlású valószínűségi változó értékkészlete $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - 0,1 - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = 1 - 0,1 - \lambda \cdot 0,1 - \frac{\lambda^2}{2} 0,1 \\ &= 1 - 0,1 \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = 1 - 0,1 \left(1 + \ln 10 + \frac{(\ln 10)^2}{2}\right) \approx 0,4046\end{aligned}$$

12. Legyen az X valószínűségi változó a levert akadályok száma. Mivel a levert akadályokból sok van és az események bekövetkezése egymástól független, így X Poisson-eloszlású λ paraméterrel. A feladat szerint tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 0) = 0,05$, így az $e^{-\lambda} = 0,05$ egyenletet kell megoldanunk, amiből kapjuk, hogy két tizedesjegyre kerekítve $\lambda = 3$. A feladat szerint keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 3) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \\ &= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3} + \frac{27}{6}e^{-3} = 0,6472.\end{aligned}$$

13. A futóversenyen egy tetszőleges versenyzőbe belekerülő kullancsok száma egy X valószínűségi változó, amely közelítőleg Poisson-eloszlású (mert sok kullancs egymástól nagyjából függetlenül, nagyjából azonos valószínűséggel kerül bele egy versenyző testébe), valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel. Továbbá abból, hogy 300 versenyző talált magában egy kullancsot és 75 versenyző kettőt, a valószínűségek arányát a relatív gyakoriságok arányával közelítve az is következik, hogy $\mathbb{P}(X = 1)$ nagyjából $\frac{300}{75} = 4$ -szer annyi, mint $\mathbb{P}(X = 2)$. Abból kiindulva, hogy ez nemcsak közelítés, hanem pontos egyenlőség, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X = 1) = \lambda e^{-\lambda} = 4 \mathbb{P}(X = 2) = 4 \left(\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}\right),$$

vagyis $\lambda = 4\lambda^2/2$, azaz $\lambda = 1/2$ a Poisson-eloszlás paramétere.

Jelölje N a versenyzők számát. Azt a közelítést használva, hogy a relatív gyakoriság a valószínűség és N szorzatával pontosan megegyezik, azt kapjuk, hogy

$$N \lambda e^{-\lambda} = \frac{N}{2} e^{-2} = 300$$

(és $N \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = 75$, de ez $\lambda = 4\lambda^2/2$ miatt ekvivalens az előző egyenlettel). Ebből N -t kifejezve $N \approx 989,2328$ adódik, azaz (egész számra kerekítve) az a becslésünk, hogy 989-en indultak a versenyen.