

3b. gyakorlat (1–3. gyakorló feladatsor)

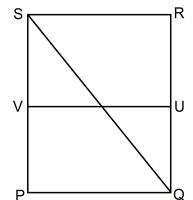
Események, valószínűség, valószínűségi mezők, diszkrét valószínűségi változók

Ezek a feladatok gyakorlaton nem fognak szerepelni, de a zh-felkészüléshez hasznosak lehetnek. A 6–8. feladat a tipikus zh-feladatoknál több középiskolai geometriatudást igényel.

1. Tekintsük az összes olyan n hosszúságú sorozatot, amelyek 0, 1, 2 számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott ilyen típusú sorozat:
 - a) 0-val kezdődik,
 - b) pontosan m db 1-et tartalmaz,
 - c) pontosan $m + 2$ db 0-t tartalmaz, amelyek közül kettő a sorozat végén van,
 - d) pontosan m_0 db 0-t, m_1 db 1-et és m_2 db 2-et tartalmaz.
2. Véletlenszerűen ledobunk egy pontot a $(\pm 10; \pm 10)$ pontok által kifeszített négyzetre. Mekkora az esélye, hogy a $(-1; -1)$, $(-1; 7)$, $(5; -1)$ pontokat összekötő háromszöglapra, ennek origóra vett középpontos tükrképére, avagy a $(\pm 2; \pm 2)$ pontok által kifeszített négyzetre esik a pontunk?
3. Legyen x és y két véletlenszerűen választott $(0, 1)$ -beli szám. Mekkora a valószínűsége, hogy $x + y < 1$ és $x \cdot y < 0,16$?
4. Igazoljuk, hogy bármely A és B eseményre $\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq \frac{1}{4}$.
5. Igazoljuk, hogy bármilyen $n \geq 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ eseményekre teljesül a következő egyenlőtlenség: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - n + 1$.
6. Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetre leejtünk egy 3 cm átmérőjű kör alakú pénzdarabot úgy, hogy a pénzdarab középpontja benne legyen a négyzetben. Tegyük fel, hogy a pénzdarab középpontja egyenletes valószínűséggel eshet akárhova (azaz egy bármilyen x cm² területű részbe esés valószínűsége $x/100$). Mennyi a valószínűsége, hogy a pénzdarab lefedi a négyzet egy csúcsát?
7. Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnyezetben, melynek koordinátáit jelölje $(a; b)$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pont közelebb van a négyzet egy oldalához, mint egy átlójához?
8. Találomra kiválasztunk egy P pontot az egységkör kerületén, majd egy Q pontot a körlapon. Mennyi a valószínűsége, hogy a QP szakasz hossza nagyobb, mint 1?
9. Egy téglalap alakú kertnek jelölje E azt a részét, ahova délelőtt süt a nap, és F azt, ahova délután. Az ábra jelöléseivel az E síkidom a PQS háromszög, míg az F síkidom a $PQUV$ téglalap, ahol U és V a QR és PS szakaszok felezőpontjai. A QR szakasz hosszát jelölje a , a PQ hosszát b .

Ha találomra választunk egy pontot a kert délelőtt napsütötte részéről, akkor mi az esélye, hogy délután nem süt oda a nap?

(2019, pótpótZH)



10. Az origóból kiindulva egy bolha ugrál a számegegyenesen. Minden ugrása egységnyi hosszú és a többitől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1 - p$ valószínűséggel balra történik. Az ötödik ugrás után megfigyeljük a bolha helyét. Adjuk meg ennek az eloszlását!
11. Egy 32 lapos magyar kártyakötegből kihúzzunk egy lapot. Legyen X a kihúzott lap értéke (alsó:2, felső:3, király:4, ász:11, hetes:7, nyolcas:8, kilences:9, tízes:10). Adjuk meg X eloszlását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $7.5 \leq X < 10.2$?
12. A véletlen kísérletünk abban áll, hogy n darab dobozba véletlenszerűen golyókat helyezünk el úgy, hogy minden elhelyezésnél bármelyik doboz kiválasztása egyformán valószínű. Akkor állunk meg, ha észrevesszük, hogy az egyes számú dobozba bekerült az első golyó. Jelölje X a kísérlet befejezésekor az elhelyezett golyók számát. Adjuk meg X eloszlását!