

2. Übungsblatt

Unabhängigkeit von Ereignissen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Multiplikationsregel, Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Bayes-Formel

- Ein regulärer Würfel wird geworfen, bezeichne x das Ergebnis des Wurf. Betrachten wir die folgenden Ereignisse: $A = \{x \text{ ist eine Primzahl}\}$, $B = \{x \text{ ist gerade}\}$, $C = \{x \leq 4\}$. Sind A und C unabhängig? Falls wir wissen, dass x gerade ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist x eine Primzahl? Also: Was ist der Wert von $\mathbb{P}(A|B)$?

- Sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbb{P}(a) = \frac{1}{27}$, $\mathbb{P}(b) = \frac{14}{27}$, $\mathbb{P}(c) = \mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(e) = \frac{4}{27}$ und

$$A_1 = \{a, d, e\}, \quad A_2 = \{a, c, e\}, \quad A_3 = \{a, c, d\}.$$

- Zeigen wir, dass $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3)$.
- Zeigen wir, dass A_1, A_2 und A_3 nicht unabhängig sind.

Bemerkung: Vergleichen wir diese Aufgabe mit Beispiel 2.1.5. im Skript von Szabolcs Mészáros!

- Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade 4 richtige Gewinnzahlen auf mindestens einer von zwei unabhängig voneinander ausgefüllten Lottoscheinen getippt werden.
- Wir wissen, dass mindestens eines der Ereignissen A und B immer eintritt. Bestimmen wir $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A | \bar{B})$, wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(A | B) = 0,2$ und $\mathbb{P}(B | A) = 0,5$ gelten. Sind A und B unabhängig?
- Seien A, B, C Ereignisse und nehmen wir an, dass es unter ihnen immer eine ungerade Anzahl von Ereignissen eintritt. Wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(A) = 3\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(C)$ und $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10}$, berechnen wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|C)$ und $\mathbb{P}(C|A)$.
- Berechnen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf mit zwei Würfeln beide Werte gerade sind gegeben, dass ihre Summe mindestens zehn ist.
- Eine reguläre Münze wird dreimal geworfen. Sei A das Ereignis, dass beide Ergebnisse "Kopf" und "Zahl" bei den Würfeln auftreten, und sei B das Ereignis, dass höchstens eine "Zahl" vorkommt. Sind A und B unabhängig?
- Nehmen wir an, dass die Ereignisse A, B und C gemeinsam unabhängig sind und dass $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$ und $\mathbb{P}(C) = 0,8$ gelten. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 - alle der Ereignisse A, B und C treten ein,
 - mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein,
 - keines von ihnen tritt ein.

- Wir haben einen Proxy, hinter dem es 6 bedienende Server gibt, und er ordnet die ankommenden Anfragen unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu ihnen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er 4 gleichzeitige Anfragen zu 4 unterschiedlichen Servern ordnet?
- Wir ziehen ein Blatt aus einem französischen Spielkartenpaket (mit 52 Blättern). Falls es ein *Pik* ist, werfen wir einen regelmäßigen Würfel *einmal*, sonst werfen wir ihn *zweimal*. Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Augenzahl 6 bei den Würfeln vorkommt?
- In einer Box gibt es 15 Tennisbälle, von denen 9 unbenutzt sind. Zu einem Tennisspiel wählen wir 3 Bälle (zufällig) aus der Box, die nach dem Spiel zurückgesetzt werden. Wenn wir einen unbenutzten Ball ausnehmen, dann wird er nach dem Spiel natürlich benutzt. Wir spielen drei Spiele. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir zu jedem Spiel einen unbenutzten und noch 2 benutzte Bälle wählen?
- Vier Städte A, B, C und D sind folgenderweise verbunden: es gibt Fahrwege von A nach B und C , von D nach B und C , und es gibt auch eine Route zwischen B und C . An einem Wintertag formt sich eine Schneeverwehung auf jedem Fahrweg (unabhängig voneinander) mit Wahrscheinlichkeit $1/5$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man an einem Wintertag von A nach D fahren kann?

-
13. Es gibt zwei Urnen, eine enthält 5 grüne und 7 blaue Kugeln, und die andere enthält 3 grüne und 8 blaue Kugeln. Wir ziehen 2 Kugeln aus der ersten Urne und setzen sie in die zweite Urne ein. Dann laden wir eine Kugel aus der zweiten Urne in die erste um. Wir ziehen schließlich noch eine Kugel aus der ersten Urne. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese letzte Kugel blau ist.
-
14. Es gibt drei mögliche Antworten für eine Prüfungsfrage. Eine hypothetische Studierende weiß die richtige Antwort mit Wahrscheinlichkeit p , und sonst tippt er (wählt aus den 3 Antworten zufällig mit gleichen Wahrscheinlichkeiten). Angenommen, dass die Frage richtig beantwortet wurde, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Studierende die Antwort wirklich gewusst hat? Was ist der Wert dieser Wahrscheinlichkeit, wenn $p = \frac{1}{4}$ gilt?
15. Ein regulärer Würfel wird geworfen, und auch eine reguläre Münze wird danach n -mal geworfen, wo die Zahl n das Ergebnis des ersten Wurfes ist.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein "Kopf" bei den Würfeln vorkommt?
 - Unter der Annahme, dass kein "Kopf" bei den Würfeln vorkommt, bestimmen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Wurf eine 6 ist.
16. Wir fragen eine (hypothetische) künstliche Intelligenz, ob sie denkt, dass eine gegebene Aussage richtig oder falsch ist. Wir wissen, dass die Aussage richtig ist. Die künstliche Intelligenz sucht im Internet nach den verfügbaren Antworten auf die Frage und gibt die Antwort „ja“ mit der Wahrscheinlichkeit, die dem Anteil der Quellen im Internet entspricht, die sagen, dass die Antwort „richtig“ ist. Wir wissen, dass im Internet genau zwei Quellen eine Antwort auf die Frage enthalten und unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „richtig“ oder „falsch“ sind. Gegeben, dass die künstliche Intelligenz eine korrekte Antwort gegeben hat, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in beiden Quellen die richtige Antwort gab?
17. Wir werfen zwei reguläre Würfeln, und falls das Ergebnis $k \in \{0, 1, 2\}$ Sechse ist, stecken wir k rote und $2 - k$ gelbe Kugel in eine (anfänglich leere) Box. Danach nehmen wir zweimal mit Zurücklegen: wir bekommen beide Mal eine rote Kugel. Was wäre unser Tipp für den Wert von k ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Tipp richtig ist?