

2. Gyakorlat

Események függetlensége, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-formula

1. Egy szabályos dobókockával dobunk, jelölje az eredményét x . Legyenek

$$A = \{x \text{ prím}\} \quad B = \{x \text{ páros}\} \quad C = \{x \leq 4\}$$

események. Független-e A és C ? Ha tudjuk, hogy x páros, mekkora eséllyel lesz prím? Azaz $\mathbb{P}(A | B) = ?$

2. Legyen $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbb{P}(a) = \frac{1}{27}$, $\mathbb{P}(b) = \frac{14}{27}$, $\mathbb{P}(c) = \mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(e) = \frac{4}{27}$ és

$$A_1 = \{d, e, a\}, \quad A_2 = \{c, e, a\}, \quad A_3 = \{c, d, a\}.$$

(a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3)$.

(b) Mutassuk meg, hogy A_1, A_2, A_3 nem függetlenek.

Megjegyzés: Vessük össze ezt a feladatot a jegyzetben szereplő 2.1.5. Példával!

3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény közül legalább az egyik pontosan négytalálatos?
4. Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbb{P}(A | B) = 0,2$ és $\mathbb{P}(B | A) = 0,5$, mennyi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ illetve $\mathbb{P}(A | \bar{B})$? Független-e A és B ?
5. Az A, B, C események közül mindig páratlan sok következik be egyszerre. Ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 3\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10}$, számoljuk ki a $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|C)$ és $\mathbb{P}(C|A)$ feltételes valószínűségeket.
6. Számoljuk ki annak a feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz.
7. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B .
8. Tegyük fel, hogy az A, B és C együttesen független eseményekre $\mathbb{P}(A) = 0,3$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, és $\mathbb{P}(C) = 0,8$. Számoljuk ki a következő események valószínűségeit:
- (a) mindhárom esemény egyszerre bekövetkezik,
- (b) a három esemény közül legalább egy bekövetkezik,
- (c) az események egyike sem következik be.

-
9. Van egy proxynk, ami mögött 6 darab kiszolgáló szerver van, és ez a beérkező kéréseket egymástól függetlenül egyforma valószínűséggel rendeli hozzájuk. 4 konkurens kérés esetén mennyi a valószínűsége, hogy különböző kiszolgálókhoz rendeli a kéréseket?
10. Először húzunk egy lapot egy 52 lapos franciakártya-csomagból. Ha ez *pikk*, egyszer, egyébként kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?
11. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három-három labdát, közben minden játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván ha volt köztük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez egy új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?
12. Négy várost utak kötnek össze a következőképp: A-t összeköti út B-vel illetve C-vel, hasonlóan D-t összeköti út B-vel és C-vel, továbbá megy egy út B és C városok között is. Egy adott téli napon az egyes útszakaszokon egymástól függetlenül $1/5$ valószínűséggel alakul ki hótorlasz. Mekkora a valószínűsége, hogy az adott napon el lehet jutni A-ból D-be?

-
13. Két urna közül az egyikben 5 zöld és 7 kék, a másikban 3 zöld és 8 kék golyó van. Az elsőből átrakunk két véletlenszerűen választott golyót a másodikba. Ezután a másodikból visszatesztünk egy véletlenszerűen választott golyót az elsőbe. Újból az elsőből húzva egy golyót, mennyi a valószínűsége, hogy kéket húztunk?
-
14. Adott egy vizsgakérdés, három lehetséges válasszal. Egy hipotetikus hallgató p valószínűséggel tudja a helyes választ, míg ha nem tudja, tippel (egyenlő eséllyel választva a három válasz közül). Feltéve, hogy helyesen válaszolt, mi a valószínűsége, hogy tudta is a választ a hallgató? Mi a helyzet $p = \frac{1}{4}$ esetén?
15. Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.
- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
 - (b) Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?
16. Egy hipotetikus mesterséges intelligenciát megkérdezzük, hogy egy adott állítás szerinte igaz-e vagy hamis. Mi tudjuk, hogy az állítás igaz. A mesterséges intelligencia az interneten keres a kérdésre adott válaszok közül, és amilyen arányban az „igaz” válasszal találkozik, olyan valószínűséggel ad „igaz” választ ő is. Tudjuk, hogy az interneten összesen 2 forrásban szerepel vagy az „igaz”, vagy a „hamis” válasz a kérdésre, és mindkét válasz egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel „igaz” vagy „hamis”. Feltéve, hogy a mesterséges intelligencia helyes választ adott, mennyi a valószínűsége, hogy mindkét forrásban a helyes válasz szerepelt?
17. Feldobunk két szabályos dobókockát és ha $k \in \{0, 1, 2\}$ darab hatos az eredmény, akkor k piros és $2 - k$ sárga golyót teszünk egy (kezdetben üres) dobozba. Ezután kétszer húzunk visszatevéssel: mindkét húzásra piros golyót húzunk. Mit tippelnénk k értékére? Mekkora esélyünk van eltalálni?
-

IMSc 2. (a) Két azonos erejű játékos, Ádám és Éva pingpongoznak. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A := \{\text{Ádám négy meccsből (pontosan) hármát megnyer}\},$$
$$B := \{\text{Éva nyolc meccsből (pontosan) ötöt megnyer}\}.$$

- (i) *Számolás nélkül* saccoljuk meg a két esemény valószínűségét. Melyik tűnik valószínűbbnek?
- (ii) Ellenőrizzük intuíciónkat a valószínűségek kiszámolásával.

(b) Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?

(Számolás nélkül is megy! A választ azért indokoljuk.)

Megjegyzés: Ez volt a nyerés feltétele a XVII. században divatos „passe dix” játékban.

(Ráth Balázs és Vető Bálint feladatsora alapján)