1. Übungsblatt

Ereignisse, Operationen, Laplacescher und geometrischer Wahrscheinlichkeitsraum, Urnenmodellen

1. Zwei Münzen werden geworfen. Wie viel Elemente hat die Ergebnismenge? Was sind die Wahscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse?

2. Zwei Würfel werden geworfen. Seien A und B Ereignisse, wo A besteht aus den Ergebnissen wofür die Summe der oben liegenden Augenzahlen zweistellig ist, und B besteht aus den Ergebnissen mit gerade Augenzahlsumme. Geben wir einen Ausdrück für die folgenden Mengen anhand der obigen Ereignisse und der Mengenoperationen (wenn es möglich ist).

   a) die Augenzahlsumme ist eine ganze Zahl
   b) die Augenzahlsumme ist irrational
   c) Augenzahlsumme 11
   d) Augenzahlsumme 7

3. Wir nehmen die Blätter mit Figuren (also die Buben, die Damen, die Könige und auch die Asse) aus einem französischen Spielkartenpaket hinaus, und dann ziehen wir einige Blätter. Sei A_i das Ereignis, dass mindestens ein Blatt des Wertes i gezogen wird ($2 \leq i \leq 10$), und seien P, Kr, H, Ka die Ereignisse, dass mindestens ein Blatt der Farbe Pik, Kreuz, Herz bzw. Karo gezogen wird. Schliesslich, sei B_j das Ereignis, dass gerade j Blätter gezogen werden ($1 \leq j \leq 36$). Geben wir einen Ausdruck für die folgenden Ereignisse anhand der obigen Ereignisse und der Mengenoperationen (wenn es möglich ist).

   a) Wir ziehen nur eine Karo 7 (und kein anderes Blatt).
   b) Weniger als 4 Blätter werden gezogen.
   c) Jedes gezogene Blatt ist Pik oder Kreuz.
   d) 3 Blätter des Wertes 7 werden gezogen (und kein anderes Blatt).
   e) 4 Blätter des Wertes 7 und 4 Blätter des Wertes 10 werden gezogen (und kein anderes Blatt).
   *f) 3 Blätter des Wertes 7 und noch ein beliebiges Blatt werden gezogen.

4. Was für Ereignisse A und B haben die folgende Eigenschaften?

   a) $A = A \cap B$ b) $A = A \cup B$ c) $A = A \cap \overline{B}$ d) $A \cup B = A \cap B$

5. Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Betrachten wir die folgende Ereignisse:

$$A = \{\text{Würfe mit Augenzahlsumme 7}\}, \qquad B = \{\text{Würfe mit drei geraden Augenzahlen}\},$$

$$C = \{\text{Würfe mit mindestens einer Augenzahl 3}\}.$$

   Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{C}))$ und $\mathbb{P}((A \cup C) \cap \overline{B})$.

---

6. Zwei Zahlen werden im Intervall $[0, 1]$ zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Berechnen wir die Warscheinlichkeit dafür, dass eine der Zahlen größer als zweimal die andere ist.

7. Zwei Zahlen x und y werden unabhängig voneinander zufällig ausgewählt, x im Intervall $(0; 2)$ und y im Intervall $(0; 3)$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es möglich ist, ein Dreieck mit Seiten x, y und 1 zu konstruieren.

8. Nehmen wir einen zufällig ausgewählten Punkt aus der Einheitskreisscheibe und ein festes, in diesen Kreis eingeschriebenes Quadrat. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt in das Innere des Quadrats fällt?

9. Ein Punkt $P = (a, b)$ wird im Einheitsquadrat zufällig ausgewählt. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Polynom $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ keine reelle Wurzel hat.

---

10. Im „Ötöslottó” („Lotto 5 aus 90”) werden aus 90 nummerierten Kugeln 5 unterschiedliche gezogen. Sei A das Ereignis, dass jede gezogene Zahl höchstens 50 ist; sei B das Ereignis, dass jede gezogene Zahl gerade ist; und sei C das Ereignis, dass jede gezogene Zahl mindestens 20 ist. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

11. Zwei reguläre Münzen werden n-mal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir uns während der Würfe sowohl mit dem Fall „zwei Köpfe” als auch mit dem Fall „zwei Zahlen” treffen?

12. Zeigen wir, dass im Falle $\mathbb{P}(A) = 0{,}7$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}6$, $\mathbb{P}(C) = 0{,}9$ die folgenden Aussagen gelten.

    (a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0{,}3$

    (b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0{,}2$

---

13. An einem Autorennen nehmen 22 Autofahrer teil. Unter den Autofahrern können einige aus dem Rennen herausfallen, diese bekommen den ∞. Platz. Wenn wir die Namen der Fahrer, die einen der ersten 3 Plätze bekommen, wachsend sortiert aufschreiben, wie viele mögliche Ergebnisse gibt es?

14. Wir fügen in ein anfangs leeres Array $2n$ Elemente ein, das von 1 bis $2n$ indiziert ist (wobei $n \geq 1$), so dass alle zwei Elemente unterschiedliche Plätze bekommen. Davor markieren wir zwei Elemente. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zwei markierten Elemente auf zwei benachbarte Plätze kommen?

15. Eine Prüfung hat 10 Multiple-Choice-Aufgaben, mit jeweils 4 Antwortsmöglichkeiten, davon jeweils eine Antwort richtig ist. Ein(e) Studierende(r) kommt ohne zu Lernen zur Prüfung und beantwortet die Fragen zufällig (er/sie wählt zufällig eine aus allen möglichen Folgen von Antworten aus). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er keine Frage richtig beantwortet? Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 3 Fragen richtig beantwortet?

16. 10 Ehepaare sind tanzen gegangen. Jede Person hat mit genau einer Person aus dem anderen Geschlecht getanzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es genau 7 Ehepaare gab, deren Mitglieder (jeweils) miteinander getanzt haben?

17. Tante Magda füllt 20 Lottoscheine zufällig aus (auf jedem Schein wählt sie 5 Zahlen aus den Zahlen zwischen 1 und 90 unabhängig von den anderen Scheinen). Bestimmen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    (a) Alle Scheine sind unterschiedlich ausgefüllt.
    (b) Alle Scheine sind unterschiedlich ausgefüllt, und die Zahl 7 kommt auf genau 7 Scheinen vor.