

1. Gyakorlat

Eseményalgebra, klasszikus és geometriai valószínűségi mező, Poincaré-formula, kombinatorika
Végeredmények/megoldások

1. Eseménytérnek választhatjuk pl. a 2 elemű F – I sorozatok halmazát, ahol az első betű az első, a második betű pedig a második érmedobás eredményét adja meg (F =fej, I =írás): $\Omega = \{FF, FI, IF, II\}$. Tehát 4 elemű az eseménytér. Minden dobásnál a fej és az írás is azonos valószínűségű, így ha Ω minden részhalmazát eseménynek tekintjük, akkor minden elemi (azaz egyelemű) esemény valószínűsége $1/4$, általában pedig egy k -elemű eseményé $k/4$, ahol $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ez tehát klasszikus valószínűségi mező. Ha viszont eseménytérnek az $\Omega = \{0, 1, 2\}$ halmazt választanánk (és Ω minden részhalmazát eseménynek tekintenénk), ahol a kimenetel a dobott fejek számát adja meg, akkor nem klasszikus valószínűségi mezőt kapnánk, ugyanis $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = 1/4$, de $\mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$, vagyis nem minden elemi esemény valószínűsége azonos.

2. (Csak végeredmény.)

- a) igen, Ω b) igen, $\emptyset$
 c) igen, pl.: $A \setminus B$ d) nem lehetséges

(Indoklás a d)-re: könnyen látható, hogy a d)-beli esemény $\overline{A} \cap \overline{B}$ egy valódi, nem üres részhalmaza. $\overline{A} \cap \overline{B}$ -nek azonban az $\emptyset$ az egyetlen olyan valódi részhalmaza, ami A -ból és B -ből a szokásos halmazműveletekkel kifejezhető.)

(Megjegyzés: Ω és $\emptyset$ valóban kifejezhető A -val és B -vel. Pl.: $\Omega = A \cup \overline{A}$, $\emptyset = A \cap \overline{A}$.)

3. (Csak végeredmény.)

- a) pl.: $B_1 \cap A_7 \cap K_a$ b) pl.: $B_1 \cup B_2 \cup B_3$
 c) pl.: $\overline{K_a \cup K_o}$ d) pl.: $B_3 \cap \bigcup_{i=2}^6 A_i \cap \bigcup_{i=8}^{10} A_i$
 e) pl.: $B_8 \cap \bigcup_{i=2}^6 A_i \cap \bigcup_{i=8}^9 A_i$ (Összesen 4-4 db van) f) nem lehetséges

4. a) $A \subseteq B$ (mert ha egy kimenetel A -ban benne van, akkor $A = A \cap B$ miatt $A \cap B$ -ben is benne van, vagyis A -ban és B -ben is, tehát B -ben is).
 b) $B \subseteq A$ (mert ha egy kimenetel $A \cup B$ -ben benne van, akkor A -ban is benne van. $A \cup B$ -ben pont azok a kimenetek vannak benne, amik A -ban vagy B -ben benne vannak. Mivel ezek mind A -ban vannak, $B \subseteq A$).
 c) $A \cap B = \emptyset$, mert ha A -t elmetsszük $\overline{B}$ -vel, nem veszítünk belőle egy elemet sem, tehát A minden eleme $\overline{B}$ -ben van, más szavakkal: A -nak egy eleme sincs B -ben.
 d) $A = B$. Ugyanis ha lenne A -nak olyan eleme, ami B -ben nincs benne, az $A \cup B$ -ben lenne, de $A \cap B$ -ben nem. Hasonlóan B -nek sem lehet olyan eleme, ami A -ban nincs benne. A és B elemei tehát ugyanazok, vagyis $A = B$.

5. Mivel $B \subseteq \overline{C}$, $\mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{C})) = \mathbb{P}(A \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\text{az összeg 7 és nincs köztük hármas})$. Ha Ω -nak az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \{1, \dots, 6\}\}$ Descartes-szorzatot választjuk, akkor (klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, ahol)

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{C}) = \frac{|\{(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1), (4, 2, 1), (4, 1, 2), (2, 4, 1), (2, 1, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 4)\}|}{216} = \frac{1}{24}.$$

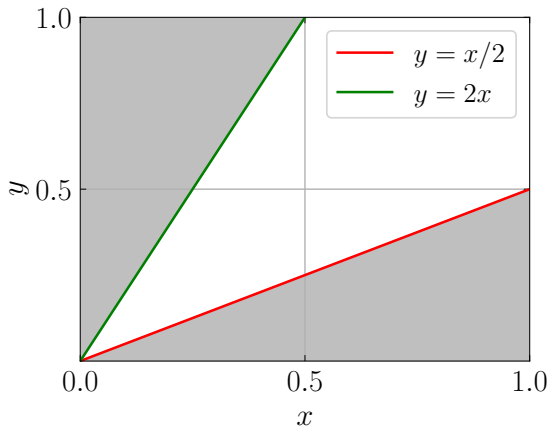
$$\mathbb{P}((A \cup C) \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \setminus C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(A \cap \overline{C}) = \frac{(216 - 125) + 9}{216} = \frac{25}{54}$$

(itt $\mathbb{P}(\overline{C}) = \frac{125}{216}$, mert a $\overline{C}$ szerint kedvező esetekben mindhárom dobás 5-féle lehet).

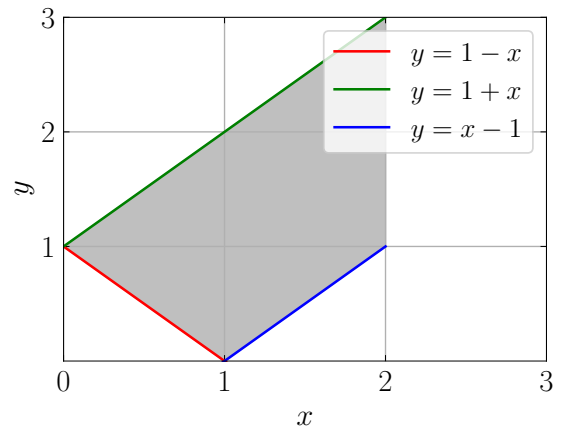
6. $\frac{1}{2}$

Legyen a két szám $x, y \in [0, 1]$, ekkor $(x, y) \in [0, 1]^2 =: \Omega$, geometriai valószínűséget használunk. Legyenek A és B események. Mivel az egyik szám több, mint kétszerese lesz a másiknak: $A = \{x > 2y\}$ vagy $B = \{y > 2x\}$. A megfelelő egyeneseket, illetve az egyenlőtlenségeknek megfelelő területeket az [1a.](#) grafikon ábrázolja.

$$\text{Így } \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{T_{\text{hasznos}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{2}.$$



(a) 6. feladat



(b) 7. feladat

1. ábra

7. $\frac{1}{2}$

Legyen a két szám $x \in [0, 2]$, és $y \in [0, 3]$, ekkor $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 3] =: \Omega$ és geometriai valószínűséget használunk. Legyenek A, B és C események. Akkor szerkeszthető háromszög, ha mindhárom oldalánál hosszabb a másik kettő összege, azaz ha

$$\begin{cases} A = \{x + y > 1\} & \rightarrow A = \{y > 1 - x\} \\ B = \{x + 1 > y\} & \rightarrow B = \{y < 1 + x\} \\ C = \{y + 1 > x\} & \rightarrow C = \{y > x - 1\}. \end{cases}$$

A megfelelő egyeneseket, illetve az egyenlőtlenségeknek megfelelő területeket az 1b. grafikon ábrázolja.

$$\text{Így } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{T_{\text{hasznos}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

8. $\frac{2}{\pi}$

Legyen Ω az egység sugarú körlap, geometriai valószínűségi mezőt használunk. A kör területe $T_{\text{összes}} = T_{\Omega} = 1^2\pi = \pi$. A kedvező terület a körbe írt négyzet területe. Ezen négyzet átlója a kör átmérője, amelynek hossza a sugár kétszerese, vagyis 2. Ezért a négyzet területe pl. a deltoid területképlete alapján $T_{\text{kedvező}} = 2 \times 2/2 = 2$ (természetesen máshogy is kiszámítható). Így a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\text{a pont a négyzet belsejébe esik}) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{2}{\pi}$.

9. $\frac{2}{3}$

$(0, b) \in [0, 1]^2 =: \Omega$ és geometriai valószínűségi mezőt használunk. A másodfokú polinomnak akkor nincs valós gyöke, ha a hozzá tartozó diszkrimináns $D = (-2b)^2 - 4a \cdot 1 = 4b^2 - 4a$ negatív, azaz $b^2 < a$. Mivel $0 < b$, ez akkor teljesül, ha $b < \sqrt{a}$.

$$\text{Így } \mathbb{P}(p\text{-nek nincs valós gyöke}) = \frac{T_{\text{hasznos}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{\int_0^1 \sqrt{a} da}{1} = \frac{[a^{3/2}]_0^1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

10. *Megoldásvázlat:* $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{90}{5}} = 0.0482$, $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} = 0.0278$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{25}{5}}{\binom{90}{5}} = 0.0012$, ezekből

Poincaré-formulával $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.0748$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{90}{5}} = 0.0086$, végül Poincaré-formulával (mivel

$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{71}{5}}{\binom{90}{5}}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{\binom{31}{5}}{\binom{90}{5}} = 0.0039$ és $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{90}{5}} = 9.939 \cdot 10^{-5}$) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0.3587$ (illetve ha a korábbi kerekített értékekkel számolunk, akkor 0.3586 jön ki)

11. Eseményternek megfelel például az $\Omega = \{FF, FI, IF, II\}^n$ Descartes-szorzat, ezt használva klasszikus valószínűségi mezőt kapunk (lásd 1. feladat), ahol minden elemi esemény valószínűsége $1/4^n$. Legyen A az az esemény, hogy a dobások során mind a "két fej", mind a "két írás" esetekkel találkozunk. Tegyük fel, hogy a pénzérmék megkülönböztethetők. Ekkor $\bar{A} = \{\text{soha nem dobunk két fejet}\} \cup \{\text{soha nem dobunk két írást}\}$. Ahhoz, hogy soha ne dobjunk két fejet, mind az n dobásnál vagy mindkét pénzérmének fejét kell mutatnia, vagy az elsőnek fejet és a másodiknak írást, vagy a másodiknak fejet és az elsőnek írást, így ennek a valószínűsége $3^n/4^n$. Hasonlóan annak a valószínűsége, hogy soha nem dobunk két írást, szintén $3^n/4^n$. Ahhoz, hogy az előbbi két esemény metszete bekövetkezzen, vagyis se két fejet, se két írást ne dobjunk soha, mind az n dobásnál az első pénzérmének fejet és a másodiknak írást kell mutatnia, vagy fordítva, így ennek a valószínűsége $1/2^n$. A Poincaré-formula szerint tehát $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - 2 \cdot \frac{3^n}{4^n} + \frac{1}{2^n}$.
12. a) A két halmazos Poincaré-formulát átrendezve adódik, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$. Mivel $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1,3$ és $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, ezért $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1,3 - 1 = 0,3$.
b) Alkalmazzuk az $A \cap B$ és a C halmazokra a két halmazos Poincaré-formulát: $\mathbb{P}((A \cap B) \cup C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Az a) feladat eredményét felhasználva $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) \geq 1,2$. Tehát

$$1 \geq \mathbb{P}((A \cap B) \cup C) \geq 1,2 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C),$$

amiből $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0,2$ adódik.

13. Ha legalább hárman célba érnek, akkor az első helyezett 22, a második 21, a harmadik 20 versenyző közül kerülhet ki. Ha csak ketten érnek célba, az első helyezett 22, a második 21 versenyző közül kerülhet ki (mindenki más ∞ -edik lesz). Ha csak egyvalaki ér célba, ez a 22 versenyző egyike lehet. Végül ha senki nem ér célba, az csak egyfajta sorrendet eredményezhet. Így az eredmény $22 \cdot 21 \cdot 20 + 22 \cdot 21 + 22 + 1 = 9725$.
14. Eseményternek válasszuk az $\{1, \dots, 2n\}$ halmaz permutációinak S_{2n} halmazát. Ennek $(2n)!$ eleme van (ez az összes eset száma), és minden permutáció választása $1/(2n)!$ valószínűségű. Ha rögzítjük, hogy melyik két helyre kerül a két megjelölt elem, a többi elem sorrendje $(2n-2)!$ -féle lehet (attól függetlenül, hogy a két megjelölt elem pontosan hol van). Végül a kedvező esetek azok, ahol a két megjelölt elem egymás mellett van. Ezek az elemek lehetnek az 1. és a 2., a 2. és a 3., ..., vagy a $2n-1$ -edik és $2n$ -edik helyen, ez $2n-1$ lehetőség. Továbbá ha tudjuk, hogy melyik helyeken vannak, a két elem sorrendje mindig kétféle lehet. Így a kedvező esetek száma $2 \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!$. Tehát a keresett valószínűség

$$\frac{2 \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!}{(2n)!} = \frac{2 \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!} = \frac{1}{n}.$$

15. *Megoldásvázlat.* Mivel ahhoz, hogy mindig rosszul válaszoljon a hallgató, minden kérdésnél a 3 rossz válasz közül kell választania, ennek a valószínűsége $\frac{3^{10}}{4^{10}} = 0.0563$. Ahhoz, hogy *ne* válaszoljon jól legalább 3 kérdésre, legfeljebb 2 kérdésre válaszolhat jól. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 kérdésre válaszol jól, $10 \cdot \frac{3^9}{4^9} \cdot \frac{1}{4} = 0.1877$, annak pedig, hogy pontosan 2 kérdésre válaszol jól, $\binom{10}{2} \cdot \frac{3^8}{4^8} \cdot \frac{1}{4^2} = 0.2816$. Így annak a valószínűsége, hogy legalább 3 kérdésre jól válaszol, $1 - 0.0563 - 0.1877 - 0.2816 = 0.4744$.
16. Számozzuk a házaspárokat 1-től 10-ig. Egy lehetséges kimenetelt azonosíthatunk azzal, hogy minden 1 és 10 közti számhoz hozzárendeljük azt, hogy az adott sorszámú házaspárban lévő férfi hányas sorszámú

házaspárban lévő nővel táncolt. Így a $[10] = \{1, \dots, 10\}$ halmaz összes permutációinak S_{10} halmaza lesz a lehetséges kimenetek halmaza, és klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, ahol az összes elemi esemény száma $10!$.

A kedvező eseteknek azok a permutációk felelnek meg, amelyek a $[10]$ halmazból pontosan 7 elemet rendelnek önmagához (ők felelnek meg a saját feleségeikkel táncoló férjeknek). Ezt a 7 elemet $\binom{10}{7}$ -féleképpen választhatjuk ki. Ha kiválasztottuk ezt a 7 elemet, akkor a maradék 3 házaspár tagjait úgy kell táncospárokkra osztani, hogy ne legyen köztük együtt táncoló házaspár, vagyis a permutáció ezek 3 elem egyikéhez sem rendelheti önmagát. Ezt mindig 2-féleképpen tehetjük meg. (Pl. ha az 1., 2. és a 3. az érintett 3 házaspár, akkor az egyik lehetőség az, hogy az 1. férj a 2. feleséggel, a 2. férj a 3. feleséggel és a 3. férj az 1. feleséggel táncol, a másik pedig az, hogy az 1. férj a 3. feleséggel, a 2. férj az 1. feleséggel és a 3. férj a 2. feleséggel.) Így tehát $\binom{10}{7} \cdot 2$ kedvező eset van, ezért a végeredmény $\frac{\binom{10}{7} \cdot 2}{10!} = 0,00006138$.

17. 1. *megoldási módszer*: ha a szelvények sorrendjét figyelembe vesszük.

Mind a 20 lottószelvény $\binom{90}{5}$ -féleképpen tölthető ki a többi szelvény kitöltésétől függetlenül, így az eseménytér $\binom{90}{5}^{20}$ elemű (a valószínűségi mező pedig klasszikus).

a) A kedvező esetek száma éppen a $\binom{90}{5}$ lehetséges kitöltés 20-adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma, így a keresett valószínűség $\frac{\binom{90}{5} \cdot \dots \cdot (\binom{90}{5} - 19)}{\binom{90}{5}^{20}}$.

b) $\binom{20}{7}$ -féleképpen választhatjuk ki azt a 7 szelvényt, amelyben van 7-es. Ezen szelvények közül sorrendben az első $\binom{89}{4}$ -féleképpen tölthető ki (89 db lehetséges számból választjuk ki a 4 db, 7-estől különböző kiválasztott számot), a második $\binom{89}{4} - 1$ -féleképpen stb., végül az utolsó $\binom{89}{4} - 6$ -féleképpen. A többi 13 szelvény lehetséges kitöltéseinek számát az a) feladathoz hasonlóan leszámolva adódik a végeredmény: $\frac{\binom{20}{7} \cdot \binom{89}{4} \cdot \dots \cdot (\binom{89}{4} - 6) \cdot \binom{89}{5} \cdot \dots \cdot (\binom{89}{5} - 12)}{\binom{90}{5}^{20}}$.

2. *megoldási módszer*: ha a szelvények sorrendjét nem vesszük figyelembe.

Mind a 20 lottószelvény $\binom{90}{5}$ -féleképpen tölthető ki a többi szelvény kitöltésétől függetlenül, és mivel a sorrend nem számít, két kitöltés egyenlőnek számít, ha csak a szelvények sorrendjében különböznek, ami $20!$ -féle lehet, az eseménytér $\binom{90}{5}^{20} / 20!$ elemű (a valószínűségi mező pedig klasszikus).

a) A kedvező esetek száma éppen a $\binom{90}{5}$ lehetséges kitöltés 20-adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma, így a keresett valószínűség $\frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}^{20} / 20!}$.

b) A kedvező esetekben a 7-est tartalmazó kitöltésekből választunk 7 db-ot, ezekből $\binom{89}{4}$ darab van, a 7-est nem tartalmazókból pedig 13 db-ot, ezekből $\binom{89}{5}$ darab van (lásd az 1. megoldás b) részét). A 7-est tartalmazók választása nem befolyásolja, hogy melyik 7-est nem tartalmazókat választhatjuk (és viszont), így a kedvező esetek száma $\binom{89}{4} \cdot \binom{89}{5}$, tehát a keresett valószínűség $\frac{\binom{89}{4} \cdot \binom{89}{5}}{\binom{90}{5}^{20} / 20!}$.