

1. Gyakorlat

Eseményalgebra, klasszikus és geometriai valószínűségi mező, Poincaré-formula, kombinatorika

1. Feldobunk két pénzérmét. Hány elemű az eseménytér? Mik az egyes események valószínűségei?
 2. Feldobunk két dobókockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege kétjegyű, B pedig az, hogy a dobott számok összege páros. Fejezzük ki A és B segítségével az alábbiakat, ahol lehetséges.
 - a) a dobott számok összege egész
 - b) a dobott számok összege irracionális
 - c) a dobott számok összege 11
 - d) a dobott számok összege 7
 3. Egy pakli francia kártyából félretesszük a figurásokat, majd kihúzzunk néhány lapot. Legyen A_i az az esemény, hogy húztunk i értékű lapot, P, Ka, T, Ko rendre, hogy húztunk pikk, káró, treff vagy kőr lapot, B_i pedig, hogy i darab lapot húztunk. Fejezzük ki a fentiek segítségével az alábbiakat, ahol lehetséges.
 - a) a káró 7-est húzzuk (mást nem)
 - b) 4-nél kevesebb lapot húzzunk
 - c) minden kihúzott lap pikk vagy treff
 - d) 3 darab 7-est húzzunk (mást nem)
 - e) 4 darab 7-est és 4 darab 10-est húzzunk (mást nem)
 - f) 3 darab 7-est és még 1 valami mást húzzunk(*)
 4. Milyen A és B eseményekre igazak az alábbiak?
 - a) $A = A \cap B$
 - b) $A = A \cup B$
 - c) $A = A \cap \overline{B}$
 - d) $A \cup B = A \cap B$
 5. Három kockával dobunk. Legyenek
$$A = \{\text{az összeg } 7\} \quad B = \{\text{mindegyik páros}\} \quad C = \{\text{van közöttük hármas}\}$$
események. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{C}))$ és $\mathbb{P}((A \cup C) \cap \overline{B})$ valószínűségeket.
-
6. A $[0, 1]$ intervallumon találmra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több, mint kétszerese a másiknak?
 7. A $(0, 2)$ és $(0, 3)$ szakaszokon választunk találmra egy-egy pontot, legyenek ezek x és y . Mennyi a valószínűsége, hogy az x , y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?
 8. Vegyünk egy véletlen pontot az egység sugarú körlapról és egy rögzített, az egység sugarú körbe írt négyzetet. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont a négyzet belsejébe esik?
 9. Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomnak nincs valós gyöke?
-
10. Az 5-ös lottó sorsoláson 1-től 90-ig számozott golyókból húznak ki 5 különbözőt. Legyen A az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50; B az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros; és C az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legalább 20. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ valószínűségeket.
 11. Két szabályos pénzérmét n -szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások során mind a "két fej", mind a "két írás" esetekkel találkozunk.
 12. Igazoljuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 0,7$, $\mathbb{P}(B) = 0,6$, $\mathbb{P}(C) = 0,9$ esetén igazak az alábbiak.
 - a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0,3$
 - b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0,2$
-
13. Egy autóverseny egyik nagydíján 22 versenyző indul el. Azok között a versenyzők között, akik célba érnek, nem lehet holtverseny, viszont lehetséges, hogy bizonyos versenyzők kiesnek, és azok, akik kiesnek, ∞ . helyezetteknek számítanak (attól függetlenül, hogy a többi versenyzővel mi történt). Ha helyezés szerinti sorrendben felsoroljuk azokat a versenyzőket, akik az első három helyezett között végeztek, hányféle lehet ez a sorrend?

14. Egy kezdetben üres, 1-től $2n$ -ig indexelt tömbbe (ahol $n \geq 1$) beszúrunk $2n$ elemet úgy, hogy bármely két elem különböző helyre kerüljön. Ezt megelőzően két elemet megjelölünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két megjelölt elem egymással szomszédos helyre kerül?
 15. Egy vizsgában 10 feleletválasztós kérdés van, 4-4 válaszlehetőséggel, mindegyik kérdésnél pontosan egy válasz helyes. Egy vizsgázó tanulás nélkül, a válaszokat véletlenszerűen kiválasztva tölti ki a feladatlapot (az összes válaszlehetőség-sorozatból választ egyet véletlenszerűen). Mennyi a valószínűsége, hogy egyik kérdésre sem válaszol helyesen? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább három kérdésre helyesen válaszol?
 16. 10 házaspár táncolni ment. Mindenki pontosan egy ellenkező nemű emberrel táncolt. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 7 házaspár tagjai táncoltak egymással?
 17. Magda anyó 20 lottószelvényt tölt ki véletlenszerűen (minden szelvényen 5 számot választ ki az 1 és 90 közötti számok közül a többi szelvénytől függetlenül). Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:
 - (a) Bármely két szelvény különböző.
 - (b) Bármely két szelvény különböző, és a 7-es szám pontosan 7 szelvényen szerepel.
-

- IMSc 1. Egy 1 hosszúságú ropit két, egymástól függetlenül és taláломra választott pontban eltörünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb, mint az $a \in [1/3, 1]$ rögzített szám?
- (Ráth Balázs és Vető Bálint feladatsora alapján)*