**12. gyakorlat**

Konfidenciaintervallumok, folytonos eloszlás kvantilisei, hipotézisvizsgálat

**Végeredmények és vázlatos megoldások**

*Általános megjegyzés*: A vizsgafeladatok megoldásánál érdemes leírni, hogy a képletgyűjteményben lévő képletekben szereplő mennyiségek közül melyiknek mennyi az értéke, és azt is, hogy ezek a mennyiségek mit jelentenek (abban az esetben, ha ez a jelentés nem szerepel a képletgyűjteményben). Ezeket itt csak akkor részletezzük, amikor először szerepelnek, a többi esetben nem, de mindenhova ugyanazt kellene írni.

1. A megoldások a képletgyűjteményben lévő képletekbe való behelyettesítéssel adódnak, ahol a szokásos módon $n$ a mintaelemek száma, $\overline{x_n}$ a mintaátlagot és $s_n^*$ a korrigált empirikus szórást (és $(s_n^*)^2$ a korrigált empirikus szórásnégyzetet) jelöli, a $\Phi^{-1}$-értékeket pedig a normális eloszlás táblázatából olvassuk ki a szokásos módon: $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$ az az $x$ hely, ahol a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének $\Phi(x)$ értéke $1-\varepsilon/2$. (A többi jelölés jelentése szerepel a táblázatban.)

   a) Ismert szórás esetén a konfidenciaintervallum képletgyűjteményben szereplő képletét használjuk: $[167 - \frac{5}{\sqrt{100}} \cdot u_{0{,}025}, 167 + \frac{5}{\sqrt{100}} \cdot u_{0{,}025}] \approx [166{,}02, 167{,}98]$ (mert $u_{0{,}025} = \Phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$ a táblázat alapján),

   b) A konfidenciaintervallum képlete általában: $[\overline{x_n} - \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}]$. Tehát
   i. Mivel $s_n^* = 4 < \sigma$, ebben az esetben $\sigma$-t csökkentjük, tehát a $\frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}$ törtet csökkentjük, azaz a konfidenciaintervallum hosszát is csökkentjük.
   (Intuitív, nem precíz indoklás: kisebb szórás azt jelenti, hogy a mintaelemek általában közelebb vannak a várható értékhez, ezért rövidebb konfidenciaintervallumba is beleesnek ugyanakkora előirányzott valószínűséggel.)
   ii. Mivel $\varepsilon \mapsto u_{\varepsilon/2}$ szigorúan monoton csökkenő (ez következik a kvantilis definíciójából és abból, hogy $u_{\varepsilon/2}$ a standard normális eloszlás $1-\varepsilon/2$-kvantilise), ezért ha a konfidenciaintervallum szintjét, $1-\varepsilon$-t 0,99-re növeljük, akkor $\varepsilon$-t csökkentjük, tehát $u_{\varepsilon/2}$-t növeljük, azaz a $\frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}$ törtet növeljük, vagyis konfidenciaintervallum hosszát is növeljük.
   Egyszerűbb indoklás az adott konkrét esetben: $u_{0{,}01/2} = \Phi^{-1}(0{,}995) = 2{,}57 > u_{0{,}025} = 1{,}96$, tehát hosszabb lesz a konfidenciaintervallum.
   (Intuitív, nem precíz indoklás: ha $\varepsilon$-t csökkentjük, az azt jelenti, hogy a konfidenciaintervallumba való beleesés valószínűségét növelni akarjuk, amihez hosszabb konfidenciaintervallum kell.)
   iii. Ebben az esetben $n$-t növeljük, tehát $\sqrt{n}$-t is, ami az $\frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}$ törtet csökkenti és így a konfidenciaintervallum hosszát is csökkenti.
   (Intuitív, nem precíz indoklás: a minta*átlag* szórása a mintaelemszámmal csökken, – lásd előadás – és kisebb szórás esetén rövidebb konfidenciaintervallum is elég, ahogy az i. részben már említettük.)
   iv. A konfidenciaintervallum az átlagra szimmetrikus, ezért ha az átlagot úgy toljuk el, hogy minden más, a konfidenciaintervallum képletéhez releváns paramétert változatlanul hagyunk, akkor a konfidenciaintervallumot is ugyanennyivel toljuk el, továbbra is az átlagra lesz szimmetrikus és a hossza nem változik.

2. Ugyanígy a képletgyűjteményben szereplő képletekbe helyettesítünk be. Ebből adódik, hogy $\overline{x_7} = 37$, tehát a konfidenciaintervallum:
   $[37 - \frac{0{,}7 u_{0{,}05}}{\sqrt{7}}, 37 + \frac{0{,}7 u_{0{,}05}}{\sqrt{7}}] \approx [36{,}5661, 37{,}4339]$, ahol $u_{0{,}05} = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}64$ a táblázat alapján.

3. Az $a$ és $b$ paraméterekkel rendelkező egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye lineáris az $x = a$ és az $x = b$ pontok között, tehát az $1/2$ értéket éppen az intervallum középpontjában, $(a+b)/2$-ben éri el, amiről tudjuk, hogy megegyezik a várható értékkel.
   A $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás várható értékéről tudjuk, hogy az $1/\lambda$. Ha $m$-mel jelöljük a mediánt, annak annak ($F$-fel jelölve az eloszlásfüggvényt)

$$F(m) = 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$$

   egyenletet kell teljesítenie, vagyis átrendezve azt, hogy

$$e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow -\lambda m = -\ln(2) \Leftrightarrow m = \ln(2)/\lambda.$$

Ez tehát semmilyen $\lambda > 0$ esetén nem egyezik meg a várható értékkel (hanem annál kisebb).
A normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus a $\mu$ várható értékre, így az integrálja $-\infty$-től $\mu$-ig éppen a $-\infty$-től $\infty$-ig vett integrál fele, vagyis 1/2. Tehát a medián is $\mu$-vel egyenlő.

---

4. (a) Egyoldali, egymintás $u$-próbát használunk 0,05 terjedelemmel, arra az alternatívára, hogy:
$H_0\colon \mu \leq 2$ vs. $H_1\colon \mu > 2$ (ahol $\mu$ jelöli a naponta frissítéssel töltött idő várható értékét). (Ezt kivételesen nem kell indokolni, a feladat szövegéből és az „ártatlanság vélelmének” elvéből következik, hogy mi $H_0$.)
(b) Ha $u \in (-\infty, u_{0,05}] = (-\infty, \Phi^{-1}(1-0{,}05)) \approx (-\infty, 1{,}64]$. (Ezt sem kell indokolni, lásd a jegyzetkiegészítésben/diasoron az egyoldali, egymintás $u$-próba eljárását, „$\mu \leq \mu_0$” nullhipotézissel.)
(c) $u = u(x_1, \ldots, x_8) = \frac{\overline{x_8}-2}{\sigma}\sqrt{8} = \frac{3-2}{2}\sqrt{8} = \sqrt{8}/2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$, vagyis a (b) megoldásának megfelelően $H_0$-t elfogadjuk (nem utasítjuk el).
(d) A próba $p$-értéke az a terjedelem, amelynél éppen a $H_0$ elfogadása és elutasítása határán vagyunk, vagyis egyoldali $u$-próba esetén egy olyan $\varepsilon$, amelyre $u = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$, vagyis $\Phi(u) = 1-\varepsilon$. Mivel a normális eloszlás táblázat alapján $\Phi(u) = \Phi(1{,}4142) \approx \Phi(1{,}41) \approx 0{,}9207$, ezért $\varepsilon = 1-0{,}9207 = 0{,}0793$ a $p$-érték.
A $p$-értéknél kisebb terjedelem (pl. 1%) esetén elfogadjuk, annál nagyobb terjedelem (pl. 10%) esetén elutasítjuk $H_0$-t.
*Megjegyzés*: Mivel $\varepsilon = 0{,}05$ esetén $H_0$-t elfogadtuk, a $p$-érték ismerete nélkül is világos, hogy még kisebb terjedelem esetén is elfogadjuk, az viszont nem, hogy nagyobb terjedelem esetén elfogadjuk-e.

5. Kétoldali, egymintás $u$-próbát használunk 0,05 terjedelemmel.
$H_0\colon \mu = 1$ vs. $H_1\colon \mu \neq 1$ (ahol $\mu$ jelöli az ablakok szélességének várható értékét méterben mérve). (Ezt sem kell indokolni, szintén a feladat szövegéből következik, hogy mi $H_0$.)
$H_0$-t pontosan akkor fogadjuk el, ha $u = u(x_1, \ldots, x_{10}) \in [-u_{0,025}, u_{0,025}] = [-1{,}96, 1{,}96]$. A próbastatisztika értéke $u = \frac{\overline{x_{10}}-1}{0{,}02}\sqrt{10} = \frac{-0{,}01}{0{,}02}\sqrt{10} \approx -1{,}5811$, tehát $H_0$-t elfogadjuk.
A $p$-érték ismét az a terjedelem, amelynél éppen a $H_0$ elfogadása és elutasítása határán vagyunk, vagyis kétoldali $u$-próba esetén egy olyan $\varepsilon$, amelyre $|u| = u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$, vagyis $\Phi(u) = 1-\varepsilon/2$. Mivel $\Phi(u) = \Phi(1{,}5811) \approx \Phi(1{,}58) = 0{,}9429 = 1-\varepsilon/2$, ezért $\varepsilon = 2(1-0{,}9429) = 0{,}1142$ a $p$-érték.

6. Egyoldali, egymintás $u$-próbát használunk 0,05 terjedelemmel, arra az alternatívára, hogy
(a) $H_0\colon \mu \geq 20$ vs. $H_1\colon \mu < 20$ (ahol $\mu$ jelöli a lángosok tömegének várható értékét dkg-ban mérve). (A 3-as feladathoz hasonlóan itt sem kell indoklás, de egyébként indoklásként itt is lehet arra hivatkozni, hogy a nullhipotézist az „ártatlanság vélelmében” fogalmazzuk meg és ez alapján a feladat szövegéből világos, hogy $H_0$-nak minek kell lennie.)
(b) $H_0$-t pontosan akkor fogadjuk el, ha $u \in [-u_{0,05}, \infty) = [-1{,}64, \infty)$.
(*Megjegyzés*: A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének szimmetriája miatt $-u_{0,05} = u_{0,95}$ a standard normális eloszlás 0,05-kvantilise.)
(c) $u = \frac{\overline{x_{10}}-20}{\sigma}\sqrt{10} = -2\sqrt{10} = -6{,}3246$; $H_0$-t elutasítjuk (tehát $H_1$-et fogadjuk el).
(d) A $p$-érték itt is az az $\varepsilon$, amelyre éppen $H_0$ elfogadásának és elutasításának határán vagyunk. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy $\Phi(u) = \varepsilon$. $u$ nincs is benne a táblázatban, pl. Excelben számolva kapjuk, hogy $\Phi(u)$ rendkívül közel van a 0-hoz: $\Phi(u) = \Phi(-6{,}3246) = 1 - \Phi(6{,}3246) = 1{,}2694 \cdot 10^{-10}$, tehát ennyi a próba $p$-értéke. (Megjegyzés: a nagyon kicsi $p$-érték azt jelenti, hogy magabiztosan elutasíthatjuk $H_0$-t, kicsi a tévedés valószínűsége.)
A $p$-értéknél nagyobb terjedelem (pl. 10% vagy akár 1%) esetén elutasítjuk $H_0$-t.
*Megjegyzés*: Mivel $\varepsilon = 0{,}05$ esetén $H_0$-t elutasítottuk, a $p$-érték ismerete nélkül is világos, hogy ennél nagyobb terjedelem esetén is el fogjuk utasítani (az viszont nem, hogy kisebb terjedelem esetén elutasítjuk-e).

7. a) Kétoldali, egymintás $u$-próbát használunk, a megoldás nagyon hasonló az ablakos példához, így nem részletezzük az indoklást.
$H_0\colon \mu = 180$ vs. $H_1\colon \mu \neq 180$ (ahol $\mu$ jelöli a gépészmérnök hallgatók magasságának várható értékét; a feladat szövege alapján egyértelmű, hogy kétoldali próba kell).
5% terjedelem esetén $H_0$-t akkor fogadjuk el, ha $u \in [-u_{0,025}, u_{0,025}] = [-1{,}96, 1{,}96]$, 1% terjedelem esetén pedig akkor, ha $u \in [-u_{0,005}, u_{0,005}] = [-2{,}57, 2{,}57]$.

Mivel $u = \frac{\overline{x_{10}}-180}{\sqrt{2}}\sqrt{10} = -\sqrt{5} \approx -2{,}2361$, $H_0$-t 5% terjedelem esetén elutasítjuk, de 1% terjedelem esetén már elfogadjuk.
b) Kétoldali, kétmintás $u$-próbát használunk.
$H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$ (ahol $\mu_1$, illetve $\mu_2$ jelöli a gépészmérnök, illetve építőmérnök férfi hallgatók testmagasságát centiméterben mérve). (Indokolni itt sem kell – a feladat szövege alapján világos, hogy $H_0$-ban egyenlőségnek kell lennie, és a kétmintás $u$-próba egyoldali változata nem is szerepelt előadáson.)
(a) 5%-os terjedelem esetén $H_0$-t pontosan akkor fogadjuk el, ha $u \in [-u_{0{,}025}, u_{0{,}025}] \approx [-1{,}96, 1{,}96]$, míg 1%-os terjedelem esetén pontosan akkor, ha $u \in [-u_{0{,}005}, u_{0{,}005}] \approx [-2{,}57, 2{,}57]$.
Esetünkben $u = \frac{\overline{x_{10}}-\overline{y_{20}}}{\sqrt{\frac{2}{10}+\frac{1}{20}}} = 2$, így 5%-os terjedelem esetén $H_0$-t elutasítjuk, de 1%-os terjedelem esetén elfogadjuk.