12. gyakorlat – Konfidenciaintervallumok, folytonos eloszlás kvantilisei, hipotézisvizsgálat

1. A BME női hallgatóinak testmagasságát független, μ várható értékű és σ szórású valószínűségi változókkal modellezzük. 100 (páronként különböző) BME-s hallgatónőt véletlenszerűen kiválasztottunk, a testmagasság-adataikból álló minta átlagára 167 cm, korrigált empirikus szórására 4 cm adódott.

   (a) Adjunk a minta alapján 95% szintű konfidenciaintervallumot μ-re, ha $\sigma = 5$ cm!

   (b) Növekszik-e, csökken vagy nem változik a konfidenciaintervallum hossza, ha a többi paramétert változatlanul hagyva

      i. azt tesszük fel, hogy σ nem 5 cm, hanem a minta korrigált empirikus szórásával egyenlő?

      ii. a konfidenciaintervallum szintjét 99%-ra növeljük?

      iii. a mintaelemszámot 400-ra növeljük és változatlan átlagot kapunk?

      iv. a női hallgatók helyett 100 férfi hallgató mintáját tekintjük, akik átlagosan 179 cm magasak, szintén $\sigma = 5$ cm szórással?

   A válaszokat a b)-ben is indokoljuk, de itt a konfidenciaintervallumokat kiszámolni nem kell.

2. A Széchenyi gyógyfürdő egyik melegvizes medencéjének hőmérsékletét egy héten át mindennap megmérjük és az alábbi eredményeket kapjuk (Celsius-fokban mérve): $36{,}2, 37{,}8, 36{,}3, 37{,}7, 37{,}6, 37{,}0, 36{,}4$. Feltéve, hogy a medence hőfoka normális eloszlású és az egyes napokon mért hőmérsékleti eredmények függetlenek, adjunk 90% szintű konfidenciaintervallumot a medence hőmérsékletének várható értékére, ha a medence hőmérsékletének szórása 0,7 °C!

3. <u>Előadáson</u>: Határozzuk meg az egyenletes, az exponenciális és a normális eloszlás mediánját (azaz 1/2-kvantilisét) minden lehetséges paraméterválasztás esetén. Megegyezik-e a medián az egyes esetekben a várható értékkel?

---

4. Azt tapasztalom, hogy az okostelefonom nagyon sokszor frissíti az alkalmazásokat. Egy barátom szerint viszont, aki az okostelefont gyártó cég szoftver részlegén dolgozik, naponta átlagosan legfeljebb 2 percet tölt frissítéssel a telefon. 8 napon át megmértük, hogy melyik nap mennyi időt töltött frissítéssel a telefon, az eredmények átlaga 3 perc, korrigált empirikus szórásnégyzete 24/7 perc^2 lett. Feltéve, hogy a 8 mérési eredményünk 8 fae. normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 2$ szórással, szeretnénk 5% terjedelmű (elsőfajú hibájú) próba segítségével eldönteni, hogy igaz-e a barátom állítása.

   (a) Adjunk meg egy, a szituációnak megfelelő H_0 nullhipotézist és a H_1 ellenhipotézist.

   (b) A próbastatisztika mely értékei esetén fogadjuk el H_0-t?

   (c) Számítsuk ki a próbastatisztikát és döntsük el, hogy H_0-t elfogadjuk vagy elutasítjuk-e.

   (d) Adjuk meg a próba p-értékét. 10% terjedelem esetén elfogadnánk-e H_0-t? És 1% terjedelem esetén?

5. Egy régi lakóház 10 lakásának nagy szobáiban a kézzel készített ablakok hivatalosan 1 méter szélességűek. Az ablakok szélességét megmértük és (méterben mérve) rendre a $0.97, 1.01, 1.00, 0.98, 0.99, 0.95, 1.03, 1.00, 0.99, 0.98$ adatokat kaptuk. Vizsgáljuk meg 5% terjedelmű próbával, hogy az ablakok szélességét 1 méteresnek tekinthetjük-e, ha feltesszük, hogy az ablakok szélességei fae. normális eloszlású valószínűségi változók 2 cm szórással!

   Adjuk meg H_0-t, H_1-et, az elfogadási tartományt (ehelyett elég a próbastatisztika H_0-hoz tartozó értékeinek halmazát megadni), a próbastatisztikát és a döntést. Mennyi a próba p-értéke?

A feladatsor a túloldalon folytatódik!

6. Egy lángossütő törzsvendége szerint az utóbbi időben kisebbek a lángosok, mint régen. A hely tulajdonosa szerint várható értékben 20 dkg-osok a lángosaik. A törzsvendég 10 alkalommal megmérte az itt vásárolt lángosok tömegét, a minta átlagára 18 dkg adódott, és azt feltételezzük, hogy a mintaelemek szórása 1 dkg. Feltételezve, hogy az egyes alkalmakkor mért adatok fae. normális eloszlásúak, konstruáljunk 5% terjedelmű próbát, amellyel eldönthető, hogy eléri-e a lángosok tömegének várható értéke a 20 dkg-ot!

   (a) Adjunk meg egy, a szituációnak megfelelő H_0 nullhipotézist és a H_1 ellenhipotézist.

   (b) A próbastatisztika mely értékei esetén fogadjuk el H_0-t?

   (c) Számítsuk ki a próbastatisztikát és döntsük el, hogy H_0-t elfogadjuk vagy elutasítjuk-e.

   (d) Mennyi a próba p-értéke? 1% terjedelem esetén elfogadnánk-e H_0-t? És 10% terjedelem esetén?

7. Véletlenszerűen kiválasztottuk a BME 10 gépészmérnök férfi hallgatóját, az ő átlagos testmagasságuk 179 cm volt, valamint a BME 20 építőmérnök férfi hallgatóját, az ő esetükben az átlag 178 cm volt. Feltéve, hogy az egyes hallgatók testmagasságai függetlenek, normális eloszlásúak és azonos szak esetén azonos eloszlásúak is, továbbá a gépészmérnökök testmagasságának szórása $\sqrt{2}$ cm, az építőmérnököké pedig 1 cm, vizsgáljuk meg a minta alapján 5% és 1% terjedelmű próba segítségével is, hogy

   (a) a gépészmérnök hallgatók magasságának várható értéke megegyezik-e 180 cm-rel, illetve

   (b)* (<u>előadáson</u>:) a két szakra járók testmagasságának várható értéke megegyezik-e egymással!

   Mindkét esetben adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika elfogadási tartománynak megfelelő értékei halmazát, a próbastatisztika értékét és a döntést.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p=\mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\dots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,2,\dots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,\dots\}$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Konfidenciaintervallumokhoz és hipotézisvizsgálatokhoz képletek

$s_n^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2) - \overline{x_n}^2$, $(s_n^*)^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_n})^2$, $s_n^* = \sqrt{(s_n^*)^2}$.

u-próba

1. Kétoldali, egymintás: $u = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$,
   konfidenciaintervallum μ-re:
   $$[\overline{x_n} - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}].$$
2. Egyoldali, egymintás: $u = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$.
3. Kétoldali, kétmintás: $u = \frac{\overline{x_{n_1}}-\overline{y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$.

Azok a képletek és táblázatok, amelyek egy adott vizsgákhoz nem szükségesek, nem feltétlenül fognak mind szerepelni a feladatsoron. A nevezetes eloszlás táblázat azonban mindig szerepelni fog. Esetenként a feladatokhoz nem szükséges képletek vagy táblázatok is szerepelhetnek.