11. gyakorlat

Független normálisok összegének tulajdonságai, Csebisev-egyenlőtlenség.
Statisztikai alapfogalmak, empirikus eloszlásfüggvény

1. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1;9)$ és $Y \sim \mathrm{N}(2;16)$ független, normális eloszlású valószínűségi változók.
   (a) Mennyi $\mathbb{P}(X > 0{,}5)$? *(Ismétlő kérdés a 7. feladatsorról.)*
   (b) Határozzuk meg $X + 2Y$ és $X - 4Y$ kovarianciáját és korrelációját.
   (c) Milyen eloszlású a $2X + Y$ valószínűségi változó és milyen paraméterekkel (és miért)?

   (Vizsga, 2025.01.23., 4. feladat)

2. Legyenek X_1, X_2, X_3 együttesen független, normális eloszlású valószínűségi változók, egységesen μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Milyen eloszlású az $Y = \frac{X_1+X_2+X_3-3\mu}{\sqrt{3}\sigma}$ valószínűségi változó? Mennyi $\mathrm{corr}(X_1, Y)$?

3. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint legyen $U = 3X - 2Y + 1$ és $V = 7X - 5Y - 3$.
   a) Mi $(X, Y)^T$ kovarianciamátrixa?
   b) Mi $(U, V)^T$ várhatóérték-vektora és kovarianciamátrixa?
   c) Mennyi $\mathrm{cov}(-2U + V, 12U - 5V)$?
   d) Független-e $-2U + V$ és $12U - 5V$?

4. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1;4)$ és $Y \sim \mathrm{N}(-2;1)$ független, normális eloszlású valószínűségi változók és legyen $U := X + Y$ és a $V := X - 2Y$.
   (a) Adjuk meg az $(U, V)^T$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték-vektorát (azaz $(\mathbb{E}(U), \mathbb{E}(V))^T$-t) és kovarianciamátrixát.
   (b) Független-e U és V?
   (c) Mi V regressziós egyenese U-ra?
   (d*) Ezek alapján határozzuk meg az $\mathbb{E}(U^2(2V + 1)|U)$ regressziót.

   (Vizsgakurzus vizsgája alapján, 2025.06.26., 3c)+6. feladat, módosítva, összesen 29 pontért.)*

5. <u>Előadáson</u>: Legyenek $X \sim \mathrm{N}(5;2)$ és $Y \sim \mathrm{N}(4;3)$ függetlenek. Adjuk meg a $\mathbb{P}(X < Y)$ valószínűséget.

Az alábbi két feladat is előadáson fog szerepelni. A vizsgán is előfordulhat a Csebisev-egyenlőtlenség.

6. Egy adott adatbázis szerver átlagosan 50 lekérést fogad egy időegység alatt. A lekérések számának szórása a tapasztalatok szerint 5. Adjunk alsó becslést annak a valószínűségére, hogy 40-nél több, de 60-nál kevesebb lesz a lekérések száma egy időegység alatt.

7. Tíz szabályos dobókockával dobunk, legyen X a dobott számok összege. Korábban CHT-vel jó közelítéseket kaptunk a következő valószínűségekre: $\mathbb{P}(24 < X < 46) \approx 0{,}9586$ és a $\mathbb{P}(31 \leq X \leq 39) \approx 0{,}4147$. Milyen becsléseket kaphatunk ugyanezekre a valószínűségekre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével?

---

8. *(Igaz történet alapján.)* Egy BSZ1 szóbeli vizsgán egy vizsgáztató egy nap alatt 13 hallgatót vizsgáztatott le, és rendre az alábbi jegyeket adta: 3,2,4,5,2,1,3,3,4,5,4,1,2. Az ebben a sorrendben felsorolt jegyekből álló vektort egy 13 elemű $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{13})$ fae. minta egy realizációjának tekintve számoljuk ki a realizáció átlagát, korrigált empirikus szórását, empirikus mediánját, móduszát, az X_8^* rendezett mintaelem ezen realizációnak megfelelő értékét, és $F_{13}^*(5)$-öt, vagyis a minta empirikus eloszlásfüggvényének értékét az $x = 5$ helyen (az adott realizáció esetén).

9. Egy bányának 8 munkavállalója van: Hófehérke (a bánya igazgatója), Tudor (a műszakvezető), valamint Vidor, Morgó, Hapci, Szende, Szundi és Kuka (bányászok).

   a) Az igazgató havi fizetése 2000 peták, a műszakvezetőé 300 peták, a bányászoké pedig fejenként 200 peták. Számítsuk ki a bánya munkavállalói fizetésének átlagát, móduszát és empirikus mediánját.

   b) Vidor szabadidejében algoritmuselméleti kérdésekkel is foglalkozik. Tegyük fel, hogy megoldja a $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$ problémát, amiért 1 millió dollárt kap, átváltás után az adott hónapban a fizetése pontosan 5 millió petákra nő. Hogyan változik ebben a hónapban a bányában az átlag- és a mediánfizetés, illetve a fizetések módusza?

   Mit mondhatunk a feladat alapján az átlag és a medián viselkedéséről?

---

10. <u>Előadáson</u>: Egy szabályos dobókockát n-szer feldobunk.

    (a) $n = 7$ és $x = 3$ esetén milyen eloszlású az $nF_n^*(x)$ valószínűségi változó (vagyis a hételemű minta empirikus eloszlásfüggvényének értéke az $x = 3$ helyen a mintaelemszámmal megszorozva), és milyen paraméterekkel?

    (b) A dobás során rendre az 1,3,4,5,6,1,4 eredményeket kapjuk. Ábrázoljuk a realizációhoz tartozó F_7^* empirikus eloszlásfüggvény grafikonját. $F_7^*(1)$=? $F_7^*(6)$ =?

    (c) Legyen most $(X_1, \ldots, X_n)$ a dobókocka n-szeri feldobásainak eredményeiből álló vektor. Határozzuk meg $\lim_{n\to\infty} F_n^*(1)$-et, $\lim_{n\to\infty} F_n^*(3{,}5)$-et, $\lim_{n\to\infty} F_n^*(6)$-ot és $\lim_{n\to\infty} F_n^*(7)$-et (pontosabban azokat az értékeket, amelyekkel ezek a határértékek rendre 1 valószínűséggel egyenlőek).

11. $n \geq 1$ esetén legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók, amelyek közös sűrűségfüggvénye

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

    (a) Ha $n = 8$, milyen eloszlású a $8F_8^*(0{,}5)$ valószínűségi változó és milyen paraméterekkel? Mennyi $\mathbb{D}(F_8^*(0{,}5))$?

    (b) A mintavétel után ($n = 8$ esetén) a $\Big(0{,}11,\ \ 0{,}42,\ \ 0{,}55,\ \ 0{,}76,\ \ 0{,}29,\ \ 0{,}38,\ \ 0{,}24,\ \ 0{,}95\Big)$ realizációt kaptuk. Ábrázoljuk a realizációhoz tartozó F_8^* empirikus eloszlásfüggvény grafikonját. Mennyi $F_8^*(0{,}11)$ és $F_8^*(0{,}95)$? Határozzuk meg a minta empirikus mediánját és korrigált empirikus szórásnégyzetét is.

    (c) Mennyi $\lim_{n\to\infty} F_n^*(0{,}5)$ (1 valószínűséggel)?

12. Veszünk n darab olcsó régi billentyűzetet a bolhapiacon, az egy-egy billentyűzeten található beragadó billentyűk számait jó közelítéssel n független Poisson-eloszlású valószínűségi változó írja le $\lambda = 0{,}4$ paraméterrel. (Miért csak jó közelítéssel lehet ez igaz?) $1 \leq i \leq n$ esetén jelölje X_i az i-edik billentyűzeten található beragadó billentyűk számát, és jelölje F_n^* az $(X_1, \ldots, X_n)$ mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt. Mennyi $\lim_{n\to\infty} F_n^*(3)$ (1 valószínűséggel)?

13. * Egy szabadtéri koncerthelyszín kapacitása 12 000 fő, a megfigyelések szerint egymástól függetlenül minden koncertnapon 30% valószínűséggel van legalább 90%-os kihasználtság. Egy évben 85 koncertnap van, mindegyiken felírjuk, hogy hány százalékos kihasználtsággal zajlott a koncert, jelölje F_{85}^* az ehhez tartozó empirikus eloszlásfüggvényt. Milyen eloszlású $85F_{85}^*(0{,}9)$? Közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(F_{85}^*(0{,}9) > 0{,}75)$ valószínűséget.

14. * Legyen $n \geq 1$ esetén $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta, ahol $1 \leq i \leq n$-re $X_i \sim \mathrm{U}(0;1)$. Nagy n esetén közelítsük alkalmas approximációval a $\mathbb{P}(F_n^*(0{,}3/n) > 1/n)$ valószínűséget, ahol F_n^* jelöli a mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt.

15. <u>Előadáson</u>: Igazoljuk, hogy bármilyen eloszlású és $n \in \mathbb{N}$ elemszámú fae. minta bármely realizációja esetén az F_n^* empirikus eloszlásfüggvény valóban egy eloszlásfüggvény. Előfordulhat-e, hogy egy F_n^* eloszlásfüggvényű valószínűségi változónak létezik sűrűségfüggvénye?

Képletek

$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x_n}^2$, $(s_n^*)^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_n})^2$, $s_n^* = \sqrt{(s_n^*)^2}$.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$		$p_X(0)=1-p$, $p_X(1)=p$ $(p=\mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,2,\ldots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,\ldots\}$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998