10. Übungsblatt

Bedingter Erwartungswert, Satz vom totalen Erwartungswert, bedingte Wahrscheinlichkeit im stetigen Fall

1. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Seien X die kleinste und Y die größte Augenzahl. Bestimmen wir den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(X \mid Y = 3)$.

2. Eine Münze wird viermal geworfen. Sei Y die Anzahl der Köpfe, und sei A das Ereignis, dass wir erst beim zweiten Wurf einen Kopf werfen. Bestimmen wir den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y \mid A)$.

3. Ein Würfel wird n Mal geworfen. Sei X die Anzahl der Sechsen, und sei Y die Anzahl der geraden Augenzahlen. Bestimmen wir die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

---

4. Eine Zahl U wird uniform zufällig auf dem Intervall $[1; 2]$ gewählt. Sei noch M eine exponentialverteilte Wartezeit mit Parameter U.

   a) Bestimmen wir $\mathbb{E}(M \mid U)$. b) Berechnen wir die Dichtefunktion des Zufallsvektors (U, M).

5. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y} \colon (s,t) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(s^2 - st + t^2) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

   Bestimmen wir
   a) die bedingte Dichtefunktion $f_{Y|X}(t \mid s)$, b) die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$,
   c) die Kovarianzmatrix von (X, Y) und d) die lineare Regression von Y auf X.

6. Bestimmen wir die Regression $\mathbb{E}(X \mid Y)$, falls (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor ist mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y} \colon (s,t) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(s + t + st) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

7. *(Prüfung, 25.01.2024, Aufgabe 5)* Die gemeinsame Dichte eines Zufallsvektors (X, Y) ist

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/4, & \text{falls } 1 < x < 3 \text{ und } 2 < y < 2x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen wir den Wert von $f_{Y|X}(y|x)$ für jedes $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Dementsprechend zeigen wir, dass $\mathbb{E}(Y|X) = X + 1$. (c) Berechnen wir den Wert von $\mathbb{P}(X < 2)$.

8. Der stetige Zufallsvektor (X, Y) ist uniform verteilt auf der Fläche begrenzt durch die x-Achse und die Sinuskurve $y = \sin(x)$ zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Die gemeinsame Dichte von X und Y, sowie die Randdichte von X kennen wir schon vom 8. Übungsblatt. Berechnen wir die bedingte Dichtefunktion $f_{Y|X}(t|s)$ und die bedingte Verteilungsfunktion $F_{Y|X}(t|s)$.

9. Seien $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Berechnen wir
   a) $\mathbb{E}(3X - Y + 1 \mid X)$, b) $\mathbb{E}\left((2XY)^2 - 7Y \mid X\right)$,
   c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 \mid X + Y)$, d) $\mathbb{E}\left(X^2 \mathrm{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y \mid Y\right)$.

10. In der Vorlesung: Seien $X \sim \mathrm{N}(2; 4)$ und $Y \sim \mathrm{U}(0, 2)$ unabhängige Zufallsvariablen und sei $Z = 2X \ln Y + X^2Y^2 - 3Y$. Berechnen wir die Regression $\mathbb{E}(Z \mid Y)$. *(Prüfung, 22.12.2022, Aufgabe 5)*

---

11. Wir suchen nach einer Datei, die sich auf einem Laufwerk aus unseren zwei Laufwerken befindet. Es ist auf dem ersten Laufwerk mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und auf dem anderen Laufwerk mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Die Durchsicht des ersten Laufwerks dauert 7 Minuten, und die Durchsicht des zweiten Laufwerks dauert 3 Minuten. Nehmen wir an, dass wir die Datei nur nach der kompletten Durchsicht der richtigen Schublade finden können. Wie lange dauert die Durchsicht im Durchschnitt, wenn wir

    a) mit dem ersten Laufwerk anfangen? b) mit dem zweiten Laufwerk anfangen?

12. Ein Mensch hat sich in einem Bergwerk verirrt. Er steht in einem Knotenpunkt, aus denem er in drei Richtungen weitergehen kann. Falls er die erste Richtung wählt, kommt er nach einer Stunde aus dem Bergwerk heraus. Falls er die zweite Richtung wählt, kommt er nach 2 Stunden zurück zum Ausgangspunkt, und falls er die dritte wählt, kommt er nach 3 Stunden zurück zum Ausgangspunkt. Angenommen, dass er jedes Mal, als er eine Richtung wählen muss, jede Option mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählt, in wie viele Stunden kommt er im Erwartungswert aus dem Bergwerk heraus?

In der Vorlesung am 27.11. (in Prüfungen kann es ähnliche Aufgaben geben, aber nur in Aufgabe 6):

13. Beim Wurf einer Münze bekommen wir einen Kopf mit Wahrscheinlichkeit P, wo P ein uniform zufällig auf dem Intervall $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ gewählte Zahl ist. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Würfe, wenn wir die Würfe bis zum ersten Kopf wiederholen.

14. Sei $X \sim \mathrm{Exp}(4)$ eine Zufallsvariable. Nach der Evaluation von X wählen wir eine Zahl Y zufällig auf dem Intervall $(0; X)$. Berechnen wir $\mathbb{E}(Y)$.

15. Sei X uniform verteilt auf dem Intervall $(0, 2)$, und gegeben X, sei Y uniform verteilt auf dem Intervall $(0, 1/X)$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y < 1)$. *(Prüfung, 21.12.2023., Aufgabe 6)*

16. Sei $Y \sim \mathrm{U}(0; 1)$, und sei X uniformverteilt auf dem Intervall $[Y^2; Y]$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < 0{,}5)$ sowie den Erwartungswert von X.

17. Sei $X \sim \mathrm{U}(0; 1)$, und sei noch Y eine Zufallsvariable, die unter der Bedingung $X = \lambda$ exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von Y.

18. Eine Maschine herstellt (nicht unbedingt symmetrische) Münzen. Sei X die Wahrscheinlichkeit des Kopfes bei einer durch diese Maschine erstellten Münze. Die Dichtefunktion von X ist $f_X(t) = 6t - 6t^2$, falls $0 < t < 1$, und 0 ansonsten. Eine solche Münze wird 4-mal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Köpfe 2 ist?

19. Eine Firma sucht nach Sicherheitsfehlern regelmäßig in ihren Applikationen. Nehmen wir an, dass die Verteilung der Zeit T bis zur Entdeckung eines speziellen Sicherheitsfehlers in einer Applikation durch die Verteilungsfunktion $F_T : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{falls } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ angegeben ist.
Wenn der Fehler im Zeitpunkt t entdeckt wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er von Hackern früher entdeckt wurde, durch die Formel $1 - e^{-t}$ angegeben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Firma diesen Fehler in einer Applikation früher entdeckt, als die Hacker?

20. Onkel Cimucka pflegt eine Maispflanze auf seinem Landstück in Artern. Artern ist einer der trockensten Orte in Deutschland, die Niederschlagssumme im Juli in Millimeter wird durch eine stetige Zufallsvariable beschrieben, deren Verteilungsfunktion wie folgt gegeben ist:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{5000}, & \text{ha } 0 < x \leq 50, \\ \frac{1}{2} + \frac{x-50}{50} - \frac{(x-50)^2}{5000}, & \text{ha } 50 < x < 100, \\ 1, & \text{ha } x \geq 100. \end{cases}$$

Angenommen, dass es $x \in (0, 100)$ Millimeter Regen im Juli gibt, vertrocknet der Mais bis zum Ende des Monats mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{x}{100}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bis zum Ende des Monats nicht vertrocknet? (*Prüfung, 10.06.2024., Aufgabe 6*)

21. Während der Kursanmeldung kann die freie Kapazität proportional zur totalen Anzahl der Plätze durch eine Zufallsvariable $X \sim \mathrm{U}(0{,}01; 0{,}11)$ beschrieben werden. Joseph möchte sich für seinen Lieblingskurs (freie Wahl) anmelden, aber er hat höchstens drei versuche, danach gibt keine freie Plätze mehr. Gegeben X ist jeder Anmeldungsversuch unabhängig von der anderen Versuchen mit Wahrscheinlichkeit X erfolgreich. Nach einer erfolgreichen Versuch kann Joseph sich für den Kurs tatsächlich anmelden, sonst muss er es weiter versuchen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich Joseph für den Kurs anmelden kann? (Zwischen den Versuchen ändert sich das Wert von X nicht.)