10. Gyakorlat

Feltételes várható érték, teljes várható érték tétele, feltételes valószínűség folytonos esetben

Végeredmények

1. Eseménytérnek jó például a $[6]^3 = \{1,2,3,4,5,6\}^3$ Descartes-szorzat, a valószínűségi mező pedig klasszikus, tehát minden kimenetel valószínűsége $\frac{1}{216}$. Az eseményre vonatkozó feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}(X|Y=3) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} k\,\mathbb{P}(X=k|Y=3) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} k\frac{\mathbb{P}(X=k,Y=3)}{\mathbb{P}(Y=3)}.$$

Itt $\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(\text{mindhárom dobás} \le 3) - \mathbb{P}(\text{mindhárom dobás} \le 2) = \frac{3^3}{6^3} - \frac{2^3}{6^3} = \frac{19}{216}$.
Mivel X a három dobásból a legkisebbnek és Y a legnagyobbnak az értéke, $\mathbb{P}(X=k,Y=3)=0$, ha $k>3$. Továbbá

$$\mathbb{P}(X=3,Y=3) = \mathbb{P}(\text{mindhárom dobás hármas}) = \frac{1}{216},$$

$$\mathbb{P}(X=2,Y=3) = \mathbb{P}(\{(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),(3,3,2),(3,2,3),(2,3,3)\}) = \frac{6}{216}$$

és $\mathbb{P}(X=1,Y=3) = \mathbb{P}(\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1)\}) = \frac{12}{216}$.
(Vagy: $\mathbb{P}(X=1,Y=3) = \mathbb{P}(Y=3) - \mathbb{P}(X=2,Y=3) - \mathbb{P}(X=3,Y=3) = \frac{12}{216}$.)
Így

$$\mathbb{E}(X|Y=3) = 1\cdot\frac{12/216}{19/216} + 2\cdot\frac{6/216}{19/216} + 3\cdot\frac{1/216}{19/216} = \frac{12}{19} + \frac{12}{19} + \frac{3}{19} = \frac{27}{19} = 1\frac{8}{19}.$$

2. Az eseményre vonatkozó feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}(Y|A) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(Y)} k\,\mathbb{P}(Y=k|A) = \sum_{k\in\mathrm{Ran}(Y)} k\frac{\mathbb{P}(\{Y=k\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Itt az egyes dobások eredményeinek függetlensége miatt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{az első dobás írás, a 2. fej}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Továbbá $\mathbb{P}(\{Y=4\}\cap A) = \mathbb{P}(\{Y=0\}\cap A) = 0$, hiszen ha A bekövetkezik, akkor az összes fejdobás száma nem lehet sem 0, sem 4 (mert az első dobás írás és a második fej).
Az eseményteret modellezhetjük a 4 hosszú F–I sorozatok halmazának, ez 16 lehetséges kimenetel, a valószínűségi mező pedig klasszikus (a függetlenség miatt).
Így $\mathbb{P}(\{Y=1\}\cap A) = \mathbb{P}(\text{a 2. dobás fej, a többi írás}) = \mathbb{P}(\{IFII\}) = \frac{1}{16}$,
$\mathbb{P}(\{Y=2\}\cap A) = \mathbb{P}(\text{az 1. dobás írás, a 2. dobás fej, ezenkívül még 1 fej}) = \mathbb{P}(\{IFFI, IFIF\}) = \frac{2}{16}$
és $\mathbb{P}(\{Y=3\}\cap A) = \mathbb{P}(\text{az 1. dobás írás, a többi fej}) = \mathbb{P}(\{IFFF\}) = \frac{1}{16}$. Ezért

$$\mathbb{E}(Y|A) = 1\cdot\frac{1/16}{1/4} + 2\cdot\frac{2/16}{1/4} + 3\cdot\frac{1/16}{1/4} = 2.$$

Megjegyzések:

- Használható az $\mathbb{E}(Y|A) = \frac{\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$ képlet is, ami lényegében ugyanerre a számításra vezet, csak egy kicsit kevesebbszer kell leosztani $\mathbb{P}(A)$-val.
- Érvelhetünk úgy is, hogy A ismeretében a fejdobások száma 1 (ez a 2. dobásból származik) plusz egy binomiális val. változó $n=2$ és $p=1/2$ paraméterekkel (ez a 3. és a 4. dobásból a fejek száma), amelynek a várható értéke $np=1$, innen jön a 2 mint végeredmény. Ez is precíz megoldássá tehető, azonban nem könnyű precízen leírni, ezért a vizsgán biztosabb a fentihez hasonló teljes megoldásokat leírni.

3. $\mathbb{E}(Y|X)$-et úgy kapjuk, hogy a $k \mapsto g(k) = \mathbb{E}(Y|X=k)$ regressziós függvénybe X-et írunk. Nézzük meg, mi $\mathbb{E}(Y|X=k)$, ahol k az X lényeges értékei halmazának eleme, azaz olyan, hogy $\mathbb{P}(X=k)>0$, vagyis $k\in\{0,1,\dots,n\}$. Ha tudjuk, hogy $X=k$, akkor k darab hatos dobásunk van, amelyek nyilván

párosak is. Ezenkívül van $n-k$ darab nem hatos dobásunk. Legyen Z egy kockadobás eredménye, ekkor $\mathbb{P}(Z=k|Z\neq 6)=\frac{1/6}{5/6}=\frac{1}{5}$ teljesül minden $k\in\{1,2,\dots,5\}$ esetén, tehát $\mathbb{P}(Z \text{ páros}|Z\neq 6)=\frac{2}{5}$. Itt most $n-k$ darab kockadobásunk van. Az n dobás függetlensége miatt az az információ, hogy a k dobás hatos, semmit nem árul el a többi $n-k$ dobás eredményéről. Így feltéve, hogy k hatosunk van, a maradék $n-k$ dobás közül a párosak száma binomiális eloszlású $n-k$ és $\frac{2}{5}$ paraméterrel. Ennek a várható értéke pedig $\frac{2}{5}(n-k)$. Tehát a regressziós függvény:

$$g(k)=\mathbb{E}(Y|X=k)=k+(n-k)\frac{2}{5}=\frac{3}{5}k+\frac{2}{5}n.$$

Ezért

$$\mathbb{E}(Y|X)=g(X)=\frac{3}{5}X+\frac{2}{5}n.$$

4. a) Legyen $x\in(1;2)$. Ha tudjuk, hogy $X=x$, akkor Y exponenciális eloszlású x paraméterrel.
Intuitív, nem formális számolás: tehát $\mathbb{E}(Y|X=x)$ egy $\mathrm{Exp}(x)$ eloszlású val. változó várható értéke, ami $\frac{1}{x}$. Így tehát $x\mapsto\mathbb{E}(Y|X=x)=g(x)=1/x$ a regressziós függvény.
Formális számolás: ez azt jelenti, hogy (továbbra is csak $x\in(1;2)$ esetén) Y-nek az X-ra vett feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} xe^{-xy}, & \text{ha } y>0,\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Így tehát

$$g(x)=\mathbb{E}(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty} yxe^{-xy}\mathrm{d}y=\frac{1}{x},$$

az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényére vonatkozó képlet alapján ($\mathrm{Exp}(\lambda)$ várható értéke $\frac{1}{\lambda}$).
$\mathbb{E}(Y|X)$-et úgy kapjuk, hogy a g regressziós függvénybe X-et írunk: $\mathbb{E}(Y|X)=g(X)=\frac{1}{X}$.
Megjegyzés: Ha $x\notin(1;2)$, akkor $f_X(x)=0$, ezért $f_{Y|X}(y|x)$ definíció szerint 0. Ennek az $\mathbb{E}(Y|X)$ regresszió kiszámításánál nem volt jelentősége.
b) Tudjuk, hogy ha $x\in(1;2)$ és $y\in\mathbb{R}$, akkor a feltételes sűrűségfüggvény definíciója szerint

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Ezt átrendezve

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x).$$

Mivel $X\sim\mathrm{U}(1;2)$, ezért $x\in(1;2)$-re $f_X(x)=\frac{1}{2-1}=1$, tehát $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=xe^{-xy}$, ha $y>0$ és $f_{X,Y}(x,y)=0$, ha $y\leq 0$. Továbbá ha $x\notin(1;2)$, akkor $f_{X,Y}(x,y)=0$ tetszőleges y-ra.
Összefoglalva: $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x\cdot e^{-xy} & 1\leq x\leq 2,\ 0<y\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$

5. a)

Definíció szerint $f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$, ha $f_X(x)>0$ és $f_{Y|X}(y\mid x)=0$ különben. Ha $0<x<1$, akkor

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{12}{5}(x^2-xy+y^2)\mathrm{d}y=\frac{12}{5}\left[x^2y-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^1=\frac{12}{5}(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}).$$

Így ha $x\in(0,1)$, akkor $y\in(0,1)$ esetén

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{12}{5}(x^2-xy+y^2)}{\frac{12}{5}(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{3})}=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{6x^2-3x+2}$$

míg $y\notin(0,1)$ esetén $f_{Y|X}(y\mid x)=0$. Ha $x\notin(0,1)$, akkor $f_X(x)=0$, ezért $f_{Y|X}(y\mid x)=0$ minden $y\in\mathbb{R}$-re. Összefoglalva: $\begin{cases} f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{6(x^2-xy+y^2)}{6x^2-3x+2} & x,y\in(0,1)\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$.

b) Az együttesen folytonos esetre vonatkozó regresszió képlete szerint $\mathbb{E}(Y \mid X) = g(X)$, ahol

$$g(x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)\mathrm{d}y) = \int_0^1 y \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{6x^2 - 3x + 2}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{6x^2 - 3x + 2}\int_0^1 6(x^2y - xy^2 + y^3)\mathrm{d}y = \frac{1}{6x^2 - 3x + 2}\left[\frac{6x^2y^2}{2} - \frac{6xy^3}{3} + \frac{6y^4}{4}\right]_{y=0}^1 = \frac{3x^2 - 2x + 1{,}5}{6x^2 - 3x + 2}.$$

Tehát a regresszió

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{3X^2 - 2X + 1,5}{6X^2 - 3X + 2}.$$

c) A kovarianciamátrixhoz X és Y szórásnégyzeteit és a kovarianciájukat kell meghatározni. $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, ahol

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{12}{5}(x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3})\mathrm{d}x = \frac{12}{5}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_{x=0}^1 = \frac{12}{5}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{5}.$$

és

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{12}{5}(x^4 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3})\mathrm{d}x = \frac{12}{5}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{9}\right]_{x=0}^1 = \frac{12}{5}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right]_{x=0}^1 = \frac{12}{5}\cdot\frac{72 - 45 + 40}{360} = \frac{67}{150},$$

így $\mathbb{D}^2(X) = \frac{67}{150} - \frac{9}{25} = \frac{13}{150}$. Láthatjuk, hogy $f_{X,Y}(x,y)$-ban x és y szerepe teljesen szimmetrikus, így Y-nak ugyanaz a marginális sűrűségfüggvénye, mint X-nek, ezért $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(X) = \frac{13}{150}$.
$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2$, mivel a szimmetria miatt $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$ is teljesül.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 xy\cdot\frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{12}{5}(x^3y - x^2y^2 + y^3x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \frac{12}{5}\left[\frac{x^4y}{4} - \frac{x^3y^2}{3} + \frac{y^3x^2}{2}\right]_{x=0}^1\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{12}{5}(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{2})\mathrm{d}y = \frac{12}{5}\left[\frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{8}\right]_{y=0}^1 = \frac{12}{5}\cdot\frac{10}{72} = \frac{1}{3}.$$

Így tehát $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{9}{25} = -\frac{2}{75}$. A kovarianciamátrix: $\begin{pmatrix} \mathbb{D}^2(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathbb{D}^2(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{150} & -\frac{2}{75} \\ -\frac{2}{75} & \frac{13}{150} \end{pmatrix}$.

d) A lineáris regresszió képletében szereplő paraméterek: $\beta = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{-2/75}{13/150} = -\frac{4}{13}$ és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X) = \frac{3}{5} + \frac{4}{13}\cdot\frac{3}{5} = \frac{39+12}{65} = \frac{51}{65}$. A lineáris regresszió tehát $\beta X + \alpha = -\frac{4}{13}X + \frac{51}{65}$.
Itt most nem a regressziós egyenest, hanem magát a lineáris regressziót kérdezte a feladat, azaz X-nek azt a lineáris transzformáltját, amelyik az egyenesnek megfelel (tehát egyben Y legjobb közelítése X egy lineáris transzformáltjával).

6. Rögzítsünk egy $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ értéket és arra számoljuk ki az $\mathbb{E}(X|Y = y)$ feltételes várható értéket. Az előadáson tanultak alapján

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x.$$

Az integrál kiszámolásához szükségünk van a feltételes sűrűségfüggvényre.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Meg kell határoznunk először Y peremsűrűségfüggvényét.

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{4}{5}(x + y + xy)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} + y + \frac{1}{2}y\right) = \frac{6}{5}y + \frac{2}{5},$$

így a feltételes sűrűségfüggvény

$$\frac{\frac{4}{5}(x + y + xy)}{\frac{6}{5}y + \frac{2}{5}} = \frac{2(x + y + xy)}{3y + 1}.$$

Visszatérve az eredeti kérdéshez,

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^1 x\frac{2x(x + y + xy)}{3y + 1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3y + 1}\int_0^1 x(x + y + xy)\mathrm{d}x = \frac{5y + 2}{9y + 3},$$

amiből következik, hogy a végső megoldás: $\frac{5Y+2}{9Y+3}$.

7. (a) (10 pont)
(1 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,
(1 pont) ha $f_X(x) > 0$ (az $f_X(x) = 0$ esetre a megoldás során később visszatérünk).
(1 pont) Határozzuk meg először $f_X(x)$-et, $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$,
(1 pont) és ha $1 < x < 3$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{1}{4}\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható, elég, ha az utóbbi képlet szerepel, de az fontos, hogy $1 < x < 3$)
(1 pont) $\left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{y=2x}$
(1 pont) $= x/2 - 1/2$.
(1 pont) Tehát ha $1 < x < 3$ (vagy: ha $f_X(x) > 0$), akkor: ha $2 < y < 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/4}{x/2-1/2} = \frac{1}{2x-2}$,
(1 pont) és (ugyancsak $1 < x < 3$ esetén) ha $y \leq 2$ vagy $y \geq 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = 0$.
(1 pont) Továbbá $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (minden y-ra, de nem baj, ha ezt nem hangsúlyozza), ha $f_X(x) = 0$, azaz ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$.
(b) (6 pont)
(1 pont) A regressziós függvény $\mathbb{E}[Y|X = x] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (a két jelölésből az egyik elég, és nem kell odaírni szöveggel, hogy regressziós függvény),
(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{y}{2x-2}\mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, ha világos, hogy honnan jön az y és honnan az $1/(2x-2)$ mint szorzó)
(0 pont) $= \frac{1}{2x-2}\int_2^{2x} y\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}\left[y^2/2\right]_{y=2}^{2x}$
(1 pont) $= \frac{1}{2x-2}(2x^2 - 2)$
(1 pont) $= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X)(= g(X)) = X + 1$, amit bizonyítani kellett.

2. megoldás.
(1 pont) Az (a) feladat szerint $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ adott $1 < x < 3$ esetén konstans a $(2, 2x)$ intervallumon és különben 0 (ez az 1 pont akkor is jár, ha nem írja oda, hogy különben 0),
(2 pont) ezért feltéve, hogy $X = x$, Y egyenletes eloszlású a $(2, 2x)$ intervallumon (vagy még jobb: X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(2, 2X)$ intervallumon; ha ezt írja, akkor nem kell semmit x-szel leírni, csak X-szel),
(2 pont) tehát $\mathbb{E}[Y|X = x]$ (a $(2, 2x)$ intervallum középpontjával, azaz) $\frac{2+2x}{2} = x + 1$-gyel egyenlő,
(1 pont) így $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

Ha valami olyasmit ír a számolásokat kihagyva és az (a) eredményének felhasználása nélkül (vagy abban az esetben, ha az (a)-ra rossz megoldást kapott), hogy feltéve, hogy X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $[2, 2X]$ intervallumon és ezért $\mathbb{E}[Y|X = x] = \frac{2+2x}{2} = x + 1$, arra lehet adni max. 3 pontot, és arra, hogy ebből $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$ is következik, jár még 1 pont. A maradék 2 pont akkor jár, ha ezt valahogy értelmesen megindokolja, pl. azt mondja, hogy mivel az együttes sűrűségfüggvény konstans azon a derékszögű háromszögön, ahol nem 0, adott $x \in (1, 3)$ esetén $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ is konstans $(2, 2x)$-en (itt nemcsak az fontos, hogy konstans, hanem hogy hol).

(c) (4 pont)
1. megoldás.
(1+1 pont) Felhasználva, hogy f_X-et már meghatároztuk (ezt nem muszáj odaírni), $\mathbb{P}(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{d}x$ (a két lépés összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)
(1 pont) $= \left[x^2/4 - \frac{x}{2}\right]_1^2$
(1 pont) $= 4/4 - 2/2 - 1/4 + 1/2$
(0 pont) $= 1/4$.
2. megoldás: klasszikus együttes sűrűségfüggvényes számolással. Itt az erőfeszítések mértékéhez képest sajnos viszonylag kevés pont jár.
(1 pont) $\mathbb{P}(X < 2)(= \mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 2X)) = \int_1^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (ez a két lépés összevonható és elég, ha a második kifejezés szerepel, viszont ha a második nincs meg, de az első még helyes, arra jár egy pont)

(1 pont) $= \int_1^2 \left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{2x} \mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_1^2 (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{x=1}^{2}$
(0 pont) $= \frac{4-4-1+2}{4} = \frac{1}{4}$.
3. megoldás: geometriai valószínűségi mezővel. Szintén
(1 pont) Az (X, Y) véletlen pont választása megegyezik egy (egyenletes) véletlen pont választásával az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 3, 2 < y < 2x\}$$

derékszögű háromszögben. (Ehelyett a formális leírás helyett jó egy helyes, értelmezhető ábra is. Ezért az 1 pontért nem kell indokolni; az indoklás az, hogy a sűrűségfüggvény pont ezen a háromszögön konstans és nem 0, mindenhol máshol pedig 0.)
(1 pont) (Ez az Ω eseménytér,) ennek a területe 4.
(1 pont) A kedvező terület ennek a háromszögnek az $x = 2$ egyenestől balra eső része. Ez egy (az Ω-val hasonló) derékszögű háromszög, amelynek az oldalhosszai 1 és 2, tehát a területe 1.
(1 pont) Így a geometriai valószínűségi mező képlete szerint a keresett valószínűség a kedvező és az összes terület hányadosa, vagyis 1/4.

8. (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét és X perem-sűrűségfüggényét már a 8. feladatsoron kiszámoltuk. Így a feltételes sűrűségfüggvényre az alábbi képlet adódik: $f_{Y|X}(y|x) = 0$, ha $f_X(x) = 0$, azaz $x \leq 0$ vagy $x \geq \pi$, és ha $f_X(x) > 0$, azaz $0 < x < \pi$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$. Összefoglalva:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)}, & \text{ha } 0 < x < \pi \text{ és } 0 < y < \sin(x), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A feltételes eloszlásfüggvényt úgy kapjuk, hogy a feltételes sűrűségfüggvényt az y-nak megfelelő szerint $-\infty$-től y-ig integráljuk, ahol pedig $f_X(x) = 0$, ott az értéke tetszőleges, legyen mondjuk 0:

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^{\min\{y,\sin(x)\}} \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } x \geq \pi \text{ vagy } (0 < x < \pi \text{ és } y \leq 0), \\ \frac{y}{\sin(x)}, & \text{ha } 0 < x < \pi \text{ és } 0 < y < \sin(x), \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \text{ és } y \geq 1. \end{cases}$$

9. a) Először a feltételes várható érték linearitását használjuk fel. $\mathbb{E}(3X - Y + 1|X) = 3\,\mathbb{E}(X|X) - \mathbb{E}(Y|X) + 1$. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X|X) = X$, továbbá az X és Y függetlenségéből $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ következik. Mivel ismerjük Y eloszlását, így $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$. A végső alak így $\mathbb{E}(3X - Y + 1|X) = 3X - \frac{1}{2} + 1 = 3X + \frac{1}{2}$.

b) $\mathbb{E}((2XY)^2 - 7Y|X) = \mathbb{E}((2XY)^2|X) - 7\,\mathbb{E}(Y|X) = 4X^2\,\mathbb{E}(Y^2|X) - 7\,\mathbb{E}(Y)$. Felhasználtuk, hogy a feltétel az X valváltozó, akkor a feltételes várható érték argumentumában található $4X^2$ konstansnak tekinthető, így kiemelhető a várható értékből. $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ ismét a valváltozók függetlenségéből adódik. Az $\mathbb{E}(Y^2|X) = \mathbb{E}(Y^2)$ egyenlőség is következik a függetlenségből. $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$-ből pedig $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2}$ következik. $4X^2\,\mathbb{E}(Y^2|X) - 7\,\mathbb{E}(Y) = 4X^2\,\mathbb{E}(Y^2) - 7\frac{1}{2} = 2X^2 - 3.5$.

c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2|X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^2|X + Y)$. Ha elvégezzük a $Z := X + Y$ helyettesítést, akkor látható, hogy $\mathbb{E}(Z^2|Z) = Z^2$, mivel Z-t feltéve a Z^2 konstans a feltételes várható értékben. A megoldás: $(X + Y)^2$.

d) $\mathbb{E}(X^2\mathrm{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y|Y) = \mathbb{E}(X^2\mathrm{tg}(Y)|Y) + \mathbb{E}(\frac{5X}{Y}|Y) - 2\,\mathbb{E}(Y|Y)$. A feltételes várható értékek feltétele most az Y valváltozó, így az Y szerinti függvények emelhetőek ki konstans szorzóként a feltételes várható értékekből. $\mathrm{tg}(Y)\,\mathbb{E}(X^2|Y) + \frac{5}{Y}\,\mathbb{E}(X|Y) - 2Y$. A függetlenség miatt a feltételek elhagyhatók. $\mathrm{tg}(Y)\,\mathbb{E}(X^2) + \frac{5}{Y}\,\mathbb{E}(X) - 2Y$. Mivel ismerjük X eloszlását, ezért $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{E}(X^2) = 1$, amiből a végső megoldás: $\mathrm{tg}Y - 2Y$.

10. (2 pont) $\mathbb{E}(Z \mid Y) = \mathbb{E}(2X \ln Y + X^2Y^2 - 3Y \mid Y) = \mathbb{E}(2X \ln Y \mid Y) + \mathbb{E}(X^2Y^2 \mid Y) + \mathbb{E}(-3Y \mid Y)$
(1 pont) mert... (itt a **feltételes** várható érték linearitására kell hivatkozni, de mivel az egészre csak 1 pont jár, elég annyit írni, hogy „linearitás”)

(2 pont) $= \ln Y \cdot \mathbb{E}(2X \mid Y) + Y^2 \cdot \mathbb{E}(X^2 \mid Y) + \mathbb{E}(-3Y \mid Y)$
(2 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára: taking out what is known, az ismert információ kiemelése, homogenitás, a feltétel függvényei kiemelhetők stb.)
(2 pont) $\mathbb{E}(-3Y \mid Y) = -3Y$
(2 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára – ugyanaz, mint az előbb)
(2 pont) $\mathbb{E}(2X \mid Y) = \mathbb{E}(2X)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}(X^2)$
(2 pont) mert függetlenek
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2$
(1 pont) $= 4 + 2^2 = 8$
(3 pont) $\mathbb{E}(Z \mid Y) = 4 \cdot \ln Y + 8 \cdot Y^2 - 3 \cdot Y$

---

11. a) Jelölje Y a fájl megtalálásához szükséges időt. Legyen $A = \{\text{az első meghajtón van a fájl}\}$. Az A eseményre és komplementerére (amelyek pozitív valószínűségűek és nyilván teljes eseményrendszert alkotnak) alkalmazzuk a teljes várható érték tételének teljes eseményrendszerre vonatkozó változatát:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(Y|\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A}).$$

$\mathbb{P}(A) = 2/3$, így $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1/3$. $\mathbb{E}(Y|A) = 7$, hiszen ha tudjuk, hogy A bekövetkezik, akkor Y éppen az első meghajtó végignézéséhez szükséges idő, vagyis 7 perc. $\mathbb{E}(Y|\overline{A}) = 10$, mert ha tudjuk, hogy A nem következik be, akkor Y a két meghajtó végignézéséhez szükséges idők összege, vagyis $7 + 3 = 10$ perc. Ezért

$$\mathbb{E}(Y) = 7 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ perc.}$$

b) Ugyanezzel a módszerrel dolgozunk, most jelölje Z a fájl megtalálásához szükséges idő mennyiségét, A pedig legyen ugyanaz, mint az a) feladatban. Ekkor $\mathbb{E}(Z|\overline{A}) = 3$, hiszen ha $\overline{A}$ bekövetkezik, akkor Z éppen a második meghajtó végignézéséhez szükséges idő, vagyis 3 perc. $\mathbb{E}(Z|A) = 10$, hiszen ha A következik be, akkor mindkét meghajtót végig kell nézni. Tehát a teljes várható érték tételének teljes eseményrendszerre vonatkozó változata szerint

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z|\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{E}(Z|A)\,\mathbb{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3} \text{ perc.}$$

12. Legyen X a bányából való kiutáshoz szükséges idő. Definiáljuk továbbá az A_1, A_2, A_3 eseményeket, ahol A_i az az esemény, hogy az ember az i. irányt választja. A feladat alapján minden $i = 1, 2, 3$ esetén $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}$. A feltételes várható értékek pedig $\mathbb{E}(X|A_1) = 1$, mivel ekkor az ember 1 óra alatt kijut a bányából. $\mathbb{E}(X|A_2) = \mathbb{E}(X) + 2$, hiszen ekkor 2 óra út után visszakerül a kiindulási pontba és nincs emlékezete az eddig választott irányról. Hasonlóan $\mathbb{E}(X|A_3) = \mathbb{E}(X) + 3$. Az adatok alapján felírhatjuk $\mathbb{E}(X)$-re a teljes várható érték tételét.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{E}(X|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{E}(X|A_3)\,\mathbb{P}(A_3).$$

Behelyettesítve az adatokat, a következő egyenletet kapjuk $\mathbb{E}(X)$-re:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}\left(1 + \mathbb{E}(X) + 2 + \mathbb{E}(X) + 3\right).$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 6$.

---

13. Jelölje Y a szükséges dobások számát. Legyen $p \in (1/4; 3/4)$. Ha tudjuk, hogy $P = p$, akkor Y egy p valószínűséggel fejet mutató érmével az első fejig szükséges dobások száma, ami geometriai eloszlású p paraméterrel, így a geometriai eloszlás várható értékének ismert képlete szerint $\mathbb{E}(Y|P = p) = \frac{1}{p} = g(p)$. Tehát $\mathbb{E}(Y|P) = g(P) = \frac{1}{P}$. A teljes várható érték tétele szerint pedig $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|P) = \mathbb{E}(\frac{1}{P})$. Végül mivel P egyenletes eloszlású az $(1/4; 3/4)$ intervallumon, ezért sűrűségfüggvénye ezen az intervallumon konstans $\frac{1}{3/4-1/4} = 2$ és mindenhol máshol 0, a transzformált várható értékére vonatkozó képlet szerint

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{P}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} f_P(p)\mathrm{d}p = \int_{1/4}^{3/4} \frac{2}{p}\mathrm{d}p = [2\ln x]_{1/4}^{3/4} = 2\ln\frac{3}{4} - 2\ln\frac{1}{4} \approx 2{,}197.$$

14. Legyen $x > 0$. Ha tudjuk, hogy $X = x$, akkor ennek ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(0; x)$ intervallumon, tehát az egyenletes eloszlás várható értékének ismert képlete alapján $\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{0+x}{2} = \frac{x}{2} = g(x)$. Tehát $\mathbb{E}(Y|X) = g(X) = \frac{X}{2}$. [Azt is helyes mondani, hogy X ismeretében $Y \sim \mathrm{U}(0; X)$, ezért $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{0+X}{2} = \frac{X}{2}$, ekkor nem kell „$X = x$-ekre feltételezni”, egyből mehet az X-re való feltételezés.]

    Végül a teljes várható érték tétele szerint $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

15. *1. megoldás, folytonos TVT-vel.*
    (1 pont) arra az ötletre, hogy a folytonos TVT-t kellene használni (még akkor is, ha nem sikerül jól implementálni).
    (2 pont) A folytonos TVT szerint $\mathbb{P}(Y < 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y < 1|X = x) f_X(x) \mathrm{d}x$
    (2 pont) $= \frac{1}{2} \int_0^2 \mathbb{P}(Y < 1|X = x) \mathrm{d}x$ (az előző lépéssel összevonható).
    (3 pont) Ha $x \in (0, 2)$, akkor $\mathbb{P}(Y < 1|X = x) = \int_{-\infty}^{1} f_{Y|X}(y|x) \mathrm{d}y = \int_0^1 f_{Y|X}(y|x) \mathrm{d}y$ (a két lépés összevonható, nem muszáj leírni $-\infty$-nel),
    (2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y \sim (0; 1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(= 1/(1/x)) = x$, ha $0 < x < 2$ és $0 < y < 1/x$,
    (1 pont) és $f_{Y|X}(y|x) = 0$ különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha ezt nem írja ide, de konzisztensen csak a megfelelő tartományon integrál; már az előbb feltettük, hogy $x \in (0, 2)$),
    (2 pont) tehát ha $1/x < 1$, vagyis $x > 1$ (vagyis $1 < x < 2$), akkor $\mathbb{P}(Y < 1|X = x) = 1$ (ehhez nem kötelező integrált felírni),
    (3 pont) és ha $1/x \geq 1$, vagyis $x \leq 1$ (vagyis $0 < x \leq 1$), akkor $\mathbb{P}(Y < 1|X = x) = \int_0^1 x \mathrm{d}y = x$.

    Alternatív megoldásrészlet az utóbbi 11 pontra: kiszámoljuk az $F_{Y|X}(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvényt, ami a feladat szövege szerint

    $$F_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin (0, 2) \text{ vagy } y \leq 0, \\ yx, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 0 < y < 1/x, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } y \geq 1/x, \end{cases}$$

    és ebből kiolvassuk, hogy $\mathbb{P}(Y < 1|X = x) = F_{Y|X}(1|x)$ micsoda. Az első esettel nem is muszáj foglalkozni, ha az $x \in (0, 2)$ esetre szorítkozunk. Részpontok az előző megoldáshoz hasonlóan.

    (1+1 pont) $\mathbb{P}(Y < 1) = \frac{1}{2}(\int_0^1 x \mathrm{d}x + \int_1^2 1 \mathrm{d}x)$
    (1 pont) $= \frac{1}{2}[x^2/2]_0^1 + 1/2$
    (1 pont) $= 1/4 + 1/2 = 3/4$.
    2. megoldás, a folytonos TVT megkerülésével.
    (1 pont) $\mathbb{P}(Y < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(y) \mathrm{d}y$
    (1 pont) $= \int_0^1 f_Y(y) \mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható).
    (0 pont) Tehát Y marginális sűrűségfüggvényét kellene meghatározni. (Vagy a marginális eloszlásfüggvényének értékét az 1 helyen.)
    (1+1 pont) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x = \int_0^2 f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x$ $(y \in \mathbb{R})$ (a két lépés összevonható, nem muszáj $\pm\infty$-nel kiírni),
    (2 pont) és $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.
    (2 pont) $f_X(x) = 1/2$, ha $x \in (0, 2)$ és 0 különben,
    (2 pont) valamint mivel (a feladat szövege szerint) X ismeretében $Y \sim (0; 1/X)$, $f_{Y|X}(y|x)(= 1/(1/x)) = x$, ha $0 < x < 2$ és $0 < y < 1/x$,
    (1 pont) és 0 különben (ezt a pontot nem kell levonni, ha eleve úgy számol, hogy fel sem merül, hogy ebben az esetben szüksége lenne a feltételes sűrűségfüggvény értékére).
    (2 pont) Vagyis $f_{X,Y}(x, y) = \frac{x}{2}$, ha $0 < x < 2$ és $0 < y < 1/x$
    (0 pont) és 0 különben.
    (3 pont) Innen $\mathbb{P}(Y < 1) = \int_0^2 \int_0^{\min\{1/x,1\}} \frac{x}{2} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{2} \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{1/x} \frac{x}{2} \mathrm{d}y \mathrm{d}x$
    (1 pont) $= \int_0^1 [yx/2]_{y=0}^1 \mathrm{d}x + \int_1^2 [yx/2]_{y=0}^{1/x} \mathrm{d}x$
    (1 pont) $= \int_0^1 x/2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2} \mathrm{d}x$
    (1 pont) $= [x^2/4]_0^1 + [x/2]_1^2$
    (1 pont) $= 1/4 + 1 - 1/2 = 3/4$.

16. A folytonos TVT szerint

$$\mathbb{P}(X < 0{,}5) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y)\mathrm{d}y,$$

ahol az utolsó lépésben behelyettesítettük $Y \sim \mathrm{U}(0;1)$ sűrűségfüggvényét. Továbbá ha $0 < y < 1$, akkor

$$\mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y) = F_{X|Y}(0,5|y) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x,$$

és mivel Y ismeretében $X \sim \mathrm{U}(Y; Y^2)$, ezért $x \in \mathbb{R}$ esetén az x helyen $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény értéke egy $\mathrm{U}(y^2; y)$ sűrűségfüggvény értéke, azaz

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y-y^2}, & \text{ha } y^2 < x < y, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Így tehát három esetünk van:

- 1. eset: ha $y < 0{,}5$, akkor $Y = y$ esetén $X < y < 0{,}5$, így ebben az esetben $\mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y) = 1$.
- 2. eset: ha $y^2 < 0{,}5 \leq y$, vagyis $\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor

$$\mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y) = \int_{y^2}^{0{,}5} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x = \frac{0{,}5 - y^2}{y - y^2}.$$

- 3. eset: ha $y^2 \geq 0{,}5$, azaz $y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $Y = y$ esetén $X > y^2 \geq 0{,}5$, így ekkor $\mathbb{P}(X < 0{,}5|Y = y) = 0$.

Tehát

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 0{,}5) &= \int_0^{1/2} 1\ \mathrm{d}y + \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{0{,}5 - y^2}{y - y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{0{,}5 - y}{y - y^2} + \frac{y - y^2}{y - y^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{0{,}5 - y}{y - y^2}\mathrm{d}y \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{(y - y^2)'}{y - y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}[\ln(y - y^2)]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln(1/\sqrt{2} - 1/2) - \frac{1}{2}\ln(1/2 - 1/4) \approx 0{,}6130,
\end{aligned}$$

ahol a $*$-gal jelölt egyenlőségnél az

$$\int \frac{f'(y)}{f(y)} = \ln f(y) + c$$

azonosságot használtuk.

X várható értékét a legcélszerűbb a teljes várható érték tétele szerint kiszámolni: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$. Az $f_{X|Y}(x|y)$-ra adódó fenti képletből a szokásos $g(y) = \mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x$ formulával $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ kiszámítható. Azonban elkerülhetjük olyan integrálások elvégzését, amiknek eredményét már ismerjük, ha egyszerűen a nevezetes eloszlás táblázatból nézzük ki az egyenletes eloszlás momentumait: mivel X ismeretében $Y \sim \mathrm{U}(X^2; X)$ (tehát az intervallum végpontjai itt $a = Y^2$ és $Y = X$), ezért $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{Y+Y^2}{2}$ (aki nem hiszi, integrálja ki a fent vázolt módon!).

Tehát a teljes várható érték tétele és a (nem feltételes) várható érték linearitása miatt

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\left(\frac{X + X^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y^2).$$

Végül $Y \sim \mathrm{U}(0;1)$ (itt $a = 0, b = 1$), tehát $\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$. Vagyis $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.
(Úgy is jó, hogy $\mathbb{E}(X|Y = y)$-ra használjuk az egyenletes eloszlás ismert képletét, ez lesz $g(y)$, és utána ebből számoljuk ki $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$-t, majd ennek a val. változónak a várható értéke lesz $\mathbb{E}(X)$.)

17. Legyen $x \in (0,1)$. Mivel $X = x$ ismeretében $Y \sim \mathrm{Exp}(x)$, ezért Y-nak az X-re vett feltételes eloszlásfüggvénye
$$F_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y < y|X = x) = 1 - e^{-xy},$$
ha $y > 0$ és $F_{Y|X}(y|x) = 0$ különben. (Aki nem hiszi, írja fel a feltételes sűrűségfüggvényt és integrálja $-\infty$-től y-ig az y-nak megfelelő változó szerint.) (Ha pedig $x \notin (0,1)$, akkor $F_{Y|X}(y|x)$ definíció szerint 0.)

Mivel $X \sim \mathrm{U}(0;1)$, ezért $y > 0$ esetén a folytonos TVT alapján
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y < y|X = x) f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathbb{P}(Y < y|X = x) \cdot 1\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - e^{-xy})\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x - \int_0^1 e^{-xy}\mathrm{d}x$$
$$= 1 - \Big[-\frac{1}{y}e^{-xy}\Big]_{x=0}^1 = 1 + \frac{e^{-y} - 1}{y}.$$
Ha $y \le 0$, akkor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = 0$, mert akármi is X értéke, Y mindig pozitív. Összefoglalva:
$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{e^{-y} - 1}{y}, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

18. Jelölje A azt az eseményt, hogy 4 dobásból 2 fejet (és így értelemszerűen 2 írást) dobunk. Ekkor $0 < x < 1$ esetén a feladat szövege alapján $X = x$ ismeretében a fejek száma binomiális eloszlású $n = 4$ és $p = x$ paraméterrel, más szavakkal
$$\mathbb{P}(A|X = x) = \binom{4}{2} x^2(1 - x)^2.$$
Ezért a folytonos TVT szerint
$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A|X = x) f_X(x) = \int_0^1 \underbrace{(6x - 6x^2)}_{=6x(1-x)} \underbrace{\binom{4}{2}}_{=6} x^2(1 - x)^2 = 36 \int_0^1 x^3(1 - x)^3\mathrm{d}x$$
$$= 36 \int_0^1 x^3(1 - 3x - 3x^2 + x^3)\mathrm{d}x = 36 \int_0^1 x^3 - 3x^4 - 3x^5 - x^6\mathrm{d}x$$
$$= 36[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^6}{6} - \frac{x^7}{7}]_{x=0}^1 = 36 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7}) = 36 \cdot \frac{35 - 84 + 70 - 20}{140} = \frac{36}{140} = \frac{9}{35} \approx 0{,}2571.$$

19. A feladat szövegéből tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\text{visszaélnek}|T = t) = 1 - e^{-t}$, ha $t > 0$. Ezért a folytonos TVT-t érdemes használni, amely alapján
$$\mathbb{P}(\text{visszaélnek}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\text{visszaélnek}|T = t) f_X(t)\mathrm{d}t.$$
Az f_X sűrűségfüggvényt az F_X eloszlásfüggvény deriválásával kapjuk (ahol pedig F_X nem differenciálható, ott a sűrűségfüggvény értékét választhatjuk 0-nak):
$$f_X(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2}, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Tehát
$$\mathbb{P}(\text{visszaélnek}) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-t})te^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} te^{-t^2/2}\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} te^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t. \tag{1}$$
A jobb oldalon álló integrálok közül az első éppen $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$ (mert f_X sűrűségfüggvény).

A második integrál kiszámítása nehezebb feladat; beírhatnánk akár a Wolfram Alphába is, de anélkül is kiszámítható, ha rendelkezésünkre áll egy normális eloszlás táblázat. Erre két lehetséges módszer:
1. (kevesebb ötletet igénylő, kézenfekvőbb) megoldás: parciális integrálással. Azzal a szereposztással integrálunk parciálisan, hogy $te^{-t^2/2}$-t integráljuk (primitív függvénye $-e^{-t^2/2}$), e^{-t}-t pedig deriváljuk, és így azt kapjuk, hogy
$$\int_0^{\infty} te^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t}te^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \big[-e^{-t^2/2}e^{-t}\big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

A kilépő tag értéke 1, ez a tag kiejti az (1) egyenlet jobb oldalán álló első tagot. A fennmaradó $-\int_0^\infty e^{-t}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ tag pedig negatív előjellel szerepel (1) jobb oldalán, így azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{visszaélnek}) = \int_0^\infty e^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Innen folytatás a 2. megoldás alatt.

2. (elegánsabb, de extra ötletet igénylő) megoldás: Vegyük észre, hogy az exponenciális függvény kitevőjében lévő $-(t+t^2/2)$ deriváltja $-(1+t)$. Ezért ha $e^{-(t+t^2/2)}$ nem t-vel, hanem $t+1$-gyel lenne megszorozva, akkor teljes differenciált kapnánk, amit tudnánk integrálni:

$$-\int_0^\infty te^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t = -\int_0^\infty (t+1)e^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t = \underbrace{\left[e^{-(t+t^2/2)}\right]_0^\infty}_{=1} + \int_0^\infty e^{-(t+t^2/2)}\mathrm{d}t.$$

A jobb oldalon álló első tag tehát kiejti az (1) egyenlet jobb oldalán álló integrált, ami szintén 1 volt. Így ismét a (2) egyenletet kapjuk.

Mindkét megoldás folytatása:
Az integrálandó kifejezés hasonlít egy normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez. Ugyanis teljes négyzetté kiegészítéssel azt kapjuk, hogy

$$e^{-(t+t^2/2)} = e^{-\frac{1}{2}(t^2+2t)} = e^{-\frac{1}{2}(t^2+2t+1)+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(t+1)^2} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t+1)^2}}_{\mathrm{N}(-1;1)\text{ sűrfv.}}.$$

Vagyis ha $X \sim \mathrm{N}(-1;1)$, akkor standardizálással a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{visszaélnek}) &= \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty f_X(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{P}(X>0)\\ &= \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{P}(\underbrace{\frac{X+1}{1}}_{\sim\mathrm{N}(0;1)} > \frac{0+1}{1}) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}(1-\Phi(1)) \approx \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}}(1-0{,}8413) \approx 0{,}6559.\end{aligned}$$

20. (2 pont) arra az ötletre, hogy a folytonos TVT-t akarjuk használni, még ha ez nem is jön össze.
(3 pont) Jelölje A azt az eseményt, hogy a kukoricatő nem szárad el, ekkor $\mathbb{P}(A|X=x) = \frac{x}{100}$ a feladat szerint, ha $0 < x < 100$. (Más x-ekről nem kell nyilatkozni, de fontos, hogy a $0 < x < 100$ ott legyen, vagy valami olyasmi, hogy ez olyan x-ekre teljesül, ahol $f_X(x)$ pozitív. Az A esemény elnevezésére önmagában nem jár pont.)
(1 pont) A folytonos TVT szerint (ez itt a következő lépés indoklása. Ha valahol már szerepel, hogy azt használjuk, akkor jár ez az 1 pont is, de ha jól csinálja és soha nem indokolja meg, akkor ez nem jár. Elég, ha TVT-t mond, feltéve, hogy jól használja, illetve a „teljes valószínűség tétele folytonos esetben” természetesen még jobb, mint a „folytonos TVT’)
(2 pont) $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(A|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \int_0^{100}\mathbb{P}(A|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x$ (az előző lépéssel összevonható).
(1 pont) f_X-et F_X deriválásával kapjuk meg (a szakaszhatárokon pedig 0-nak választjuk, de ha nem, az se baj. Ha viszont a szakaszhatárokon nincs mindenhol definiálva, azért 1 pont levonás). (Elég, ha ez implicit módon derül ki, ha a deriválás jó, vagy nem jó, de egyértelműen megállapítható, hogy deriválni és nem pl. integrálni akar.)
(1 pont) Így $f_X(x) = \frac{x}{2500}$, ha $0 < x < 50$,
(1 pont) $f_X(x) = \frac{1}{50} - \frac{x-50}{2500} = \frac{1}{25} - \frac{x}{2500}$, ha $50 < x < 100$ (nem baj, ha nem egyszerűsíti, de akkor később több munka lesz integrálni)
(1 pont) és $f_X(x) = 0$ különben.
(2 pont) tehát $\mathbb{P}(A) = \int_0^{50}\frac{x^2}{250\ 000}\mathrm{d}x + \int_{50}^{100}\frac{x}{2500} - \frac{x^2}{250\ 000}\mathrm{d}x$
(2 pont) $= [\frac{x^3}{750\ 000}]_0^{50} + [\frac{x^2}{5000} - \frac{x^3}{750\ 000}]_{50}^{100}$

(1 pont) $= \frac{125\ 000}{750\ 000} + \frac{10000}{5000} - \frac{1\ 000\ 000}{750\ 000} - \frac{2500}{5000} + \frac{125\ 000}{750\ 000}$
(1 pont) $\frac{7500}{5000} - \frac{750\ 000}{750\ 000} = \frac{1}{2}$ a keresett valószínűség.
Természetesen úgy is jó, hogy kiszámoljuk annak a valószínűségét, hogy a kukoricató elszárad, majd ezt kivonjuk 1-ből, de ezt nem részletezzük (a számolásokat egyszerűsíti, hogy $x/100$-zal és nem $1-x/100$-zal szorzunk).

Szabad menet közben észrevenni és kihasználni, hogy itt tulajdonképpen $X/100$ várható értékét számoljuk ki, mivel $\int_0^{100} \mathbb{P}(A|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{100} \frac{x}{100} f_X(x)\mathrm{d}x$. Ez a számításokat azért tudja egyszerűsíteni, mert mivel a sűrűségfüggvény szimmetrikus az 50-re, ebből következik $\mathbb{E}(X) = 50$ is, és ehhez nem is kell az integrálást részletezni. Vagy ha ezt a szimmetriát észrevesszük, de azt nem, hogy ez egy várhatóérték-számítás, akkor meg az $\int_0^{100} \frac{x}{100} f_X(x)\mathrm{d}x$ integrál felírása után mondhatjuk azt, hogy ez mindenképpen $\frac{1}{100}$-szor az intervallum középpontja, vagyis 1/2 lesz.

`Akit érdekel, hogy ki volt Cimucka bácsi, könnyen rátalálhat a nevére az interneten...`

21. Jelölje Y a próbálkozások számát az első sikerig. A feladat szövege alapján Józsi akkor tudja felvenni a tárgyat, ha $Y \leq 3$, valamint X ismeretében Y geometriai eloszlású X paraméterrel. Ez tehát azt jelenti, hogy $x \in (0{,}01, 0{,}11)$ esetén

$$\mathbb{P}(Y \leq 3|X=x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2,$$

és mivel $f_X(x) = 10$, ha $0{,}01 < x < 0{,}11$ és $f_X(x) = 0$ egyébként, a folytonos TVT szerint

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq 3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq 3|X=x)f_X(x)\mathrm{d}x = 10\int_{0{,}01}^{0{,}11} \mathbb{P}(Y \leq 3|X=x)\mathrm{d}x \\
&= 10\int_{0{,}01}^{0{,}11} (x + x(1-x) + x(1-x)^2)\mathrm{d}x \\
&= 10\int_{0{,}01}^{0{,}11} (x + x - x^2 + x - 2x^2 + x^3)\mathrm{d}x = 10[\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4]_{x=0{,}01}^{0{,}11} \approx 0{,}1682
\end{aligned}$$

a keresett valószínűség.