10. Gyakorlat

Feltételes várható érték, teljes várható érték tétele, feltételes valószínűség folytonos esetben

1. Háromszor dobunk egy szabályos kockával. Jelölje X a legkisebb, Y pedig a legnagyobb értéket. Adjuk meg az $\mathbb{E}(X \mid Y = 3)$ feltételes várható értéket.

2. Négyszer dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az összes fejdobás számát, A pedig azt, hogy a második dobás lesz először fej. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Y \mid A)$ feltételes várható értéket.

3. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X a hatos, Y pedig a páros dobások számát. Számoljuk ki az $\mathbb{E}(Y \mid X)$ regressziót.

---

4. Egyenletesen véletlenszerűen választok egy X számot az $[1; 2]$ intervallumon. Az X ismeretében várok X paraméterű exponenciális ideig, jelölje a várakozás idejét Y.

   a) Mennyi $\mathbb{E}(Y \mid X)$? b) Határozzuk meg (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét.

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Adjuk meg az
   a) $f_{Y|X}(y \mid x)$ feltételes sűrűségfüggvényt, b) $\mathbb{E}(Y \mid X)$ feltételes várható értéket,
   c) (X, Y) kovarianciamátrixát és d) Y-nak X-re vonatkozó lineáris regresszióját.

6. Adjuk meg az $\mathbb{E}(X \mid Y)$ regressziót, ha X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(x + y + xy) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. *(Vizsga, 2024.01.25, 5. feladat)* Egy X és egy Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg $f_{Y|X}(y|x)$ értékét minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.
   (b) Ez alapján lássuk be, hogy $\mathbb{E}(Y|X) = X + 1$. (c) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < 2)$ valószínűséget.

8. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az x tengely és az $y = \sin(x)$ szinuszgörbe által a $(0, 0)$ és a $(\frac{\pi}{2}, 0)$ pontok között határolt területen. Határozzuk meg az $f_{Y|X}$ feltételes sűrűségfüggvényt és az $F_{Y|X}$ feltételes eloszlásfüggvényt (f_X és $f_{X,Y}$ képlete: lásd 8. feladatsor!).

9. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$ független valószínűségi változók. Számoljuk ki az alábbiakat.
   a) $\mathbb{E}(3X - Y + 1 \mid X)$ b) $\mathbb{E}\left((2XY)^2 - 7Y \mid X\right)$
   c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 \mid X + Y)$ d) $\mathbb{E}\left(X^2 \mathrm{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y \mid Y\right)$

10. <u>Előadáson</u> *(Vizsga, 2022.12.22., 5. feladat)*: Legyenek $X \sim \mathrm{N}(2; 4)$ és $Y \sim \mathrm{U}(0, 2)$ független valószínűségi változók, és legyen $Z = 2X \ln Y + X^2Y^2 - 3Y$. Számoljuk ki az $\mathbb{E}(Z \mid Y)$ regressziót.

---

11. Egy fájlt keresünk, ami a két meghajtónk egyikén van, $\frac{2}{3}$ eséllyel az elsőben, egyébként a másodikban. A keresés lefuttatása az első meghajtó esetén 7 percig tart, a második esetén 3 percig. Tegyük fel, hogy a fájlt csak az őt tartalmazó meghajtó teljes átnézése után találjuk meg. Várhatóan mennyi időbe telik megtalálni a fájlt, ha az átnézést a) az első meghajtóval, b) a második meghajtóval kezdjük?

12. Egy bányában eltévedt egy ember, aki egy csomópontban áll, ahonnan három irányba mehet tovább. Az első irányt választva kijut a bányából egy óra alatt, a második irányt választva visszaérkezik ugyanide 2 óra alatt, a harmadik irányt választva pedig 3 óra alatt ér vissza ugyanide. Feltéve, hogy minden esetben, amikor választania kell, akkor egyenlő valószínűséggel választja bármelyik opciót, várhatóan mennyi idő múlva jut ki a bányából?

Előadáson, 11.27-én lesz innen pár példa (vizsgán is lehetnek hasonlóak, de csak 6. feladatban):

13. Egy érme P valószínűséggel landol a fej oldalán, ahol P egyenletes eloszlású az $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ intervallumon. Várhatóan hány dobásra lesz szükség ezzel az érmével, ha az 1. fejig folytatjuk az érmedobás kísérletet?

14. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(4)$ valószínűségi változó. Az X kiértékelése után választunk egy Y számot a $(0; X)$ intervallumon egyenletesen. $\mathbb{E}(Y) =?$

15. *(Vizsga, 2023.12.21., 6. feladat)* Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 2)$ intervallumon és X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(0, 1/X)$ intervallumon. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < 1)$ valószínűséget.

16. Legyen $Y \sim \mathrm{U}(0; 1)$ és X egyenletes eloszlású az $[Y^2; Y]$ intervallumon. $\mathbb{P}(X < 0{,}5) =?$ $\mathbb{E}(X) =?$

17. Legyen $X \sim \mathrm{U}(0; 1)$ és legyen Y olyan valószínűségi változó, hogy $X = x$ ismeretében Y exponenciális eloszlású $\lambda = x$ paraméterrel. Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.

18. Egy érmegyártó gép nem feltétlenül szimmetrikus érméket gyárt. Jelölje X egy adott érme esetén a fej eredmény valószínűségét. Az X val. változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = 6x - 6x^2$, ha $0 < x < 1$, és 0 egyébként. Egy ilyen érmét 4-szer feldobva mi a valószínűsége, hogy 2 fejet kapunk eredményül?

19. Egy alkalmazását a gyártó rendszeresen ellenőrzi biztonsági rések tekintetében. Tegyük fel, hogy egy adott biztonsági rés gyártó általi felfedezéséig eltelő T időnek a következő az eloszlásfüggvénye

$$F_T : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a hibát t időpontban fedezi fel a gyártó, akkor $1-e^{-t}$ eséllyel élnek vissza azzal. (Ha felfedezi, rögtön kijavítja, így nem élhetnek vissza vele.) Mi a valószínűsége, hogy történik visszaélés a kijavítás előtt? *Megjegyzés*: A keresett valószínűségre adódó integrál a normális eloszlás segítségével kiszámítható.

20. *(Vizsgakurzus vizsgája, 2024.06.10., 6. feladat)* Cimucka bácsi túrkevei telkén egy tő kukoricát nevelget. Túrkeve Magyarország legszárazabb területei közé tartozik, a júliusi csapadékmennyiséget milliméterben mérve egy X folytonos valószínűségi változó írja le, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{5000}, & \text{ha } 0 < x \leq 50, \\ \frac{1}{2} + \frac{x-50}{50} - \frac{(x-50)^2}{5000}, & \text{ha } 50 < x < 100, \\ 1, & \text{ha } x \geq 100. \end{cases}$$

Feltéve, hogy $x \in (0, 100)$ milliméter eső esik júliusban, a kukoricató $1 - \frac{x}{100}$ valószínűséggel szárad el a hónap végére. Mi a valószínűsége, hogy a kukoricató nem szárad el július végére?

21. Tárgyfelvétel során a tanulmányi rendszerben a szabad belépési kapacitás aránya az összes férőhely számához képest X, ahol X jó közelítéssel egyenletes eloszlású a $(0{,}01; 0{,}11)$ intervallumon. Józsi szeretné felvenni kedvenc szabadon választható tárgyát, de legfeljebb 3 próbálkozása van, utána elfogynak a tárgy férőhelyei. X ismeretében minden belépési kísérlet a többi kísérlettől függetlenül X valószínűséggel sikeres. Sikeres belépés esetén Józsi fel tudja venni a tárgyat, különben újra kell próbálkoznia. Mi a valószínűsége, hogy Józsi fel tudja venni a tárgyat? (A kísérletek között X értéke nem változik.)

IMSc 10. Legyenek X, Y valószínűségi változók pozitív és véges szórással. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ teljesül, akkor X és Y korrelálatlanok. Igaz-e, hogy ha X és Y korrelálatlanok, akkor $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ mindig teljesül? Igaz-e (a fenti feltételek teljesülése esetén), hogy ha $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, akkor $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$? *Segíthetnek a jegyzetben/feladatsorokon szereplő példák a korrelálatlanságra.*
Beadás 14. héten, de 12.15-i vizsga esetén az IMSc-pontszerzéshez a 13. héten be kell adni!