

Valószínűesszámitás és statisztika

Tartalom

- ▶ Események függetlensége
- ▶ Feltételes valószínűség
- ▶ Többlépcsős kísérletek, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele
- ▶ Bayes-tétel
- ▶ Alkalmazás: Karger algoritmus (később, ha marad idő; kiegészítő anyag)
- ▶ Kombinatorika: variációk, permutációk, kombinációk és a kapcsolódó urnamodellek

Két esemény függetlensége

(2.1.1. Definíció) Az A és B eseményeket függetlennek nevezzük, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- ▶ Első példa: egy kockával dobunk, jelölje az eredményt x . Függetlenek-e az $A = \{x \text{ prím}\}$ és a $B = \{x \text{ páros}\}$ események?
- ▶ A definícióban A és B szerepe felcserélhető
- ▶ Emiatt: A és B függetlensége azt jelenti, hogy A előfordulását B előfordulása nem befolyásolja (és ugyanez fordítva is igaz)
- ▶ **Figyelem:** a függetlenség **nem** azt jelenti, hogy a két esemény metszete az üreshalmaz (éppen ellenkezőleg)

(2.1.3. Állítás) Ha A és B függetlenek, akkor A és $\overline{B}$ is függetlenek.
(Bizonyítás)

Két esemény függetlensége

(2.1.1. Definíció) Az A és B eseményeket függetlennek nevezzük, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- ▶ Első példa: egy kockával dobunk, jelölje az eredményt x . Függetlenek-e az $A = \{x \text{ prím}\}$ és a $B = \{x \text{ páros}\}$ események?
- ▶ A definícióban A és B szerepe felcserélhető
- ▶ Emiatt: A és B függetlensége azt jelenti, hogy A előfordulását B előfordulása nem befolyásolja (és ugyanez fordítva is igaz)
- ▶ **Figyelem:** a függetlenség **nem** azt jelenti, hogy a két esemény metszete az üreshalmaz (éppen ellenkezőleg)

(2.1.3. Állítás) Ha A és B függetlenek, akkor A és $\overline{B}$ is függetlenek.
(Bizonyítás)

Több esemény függetlensége

Emlékeztető: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

(2.1.4. Definíció.) Az $A_1, \dots, A_n$ események (együttesen) függetlenek, ha minden $I \subseteq [n]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Más szavakkal az események közül valahány metszetének valószínűsége a valószínűségek szorzata.

Ez a bonyolult definíció szükséges, ugyanis:

- ▶ (1) nem következik abból, hogy bármely $i, j \in [n]$, $i \neq j$ esetén A_i és A_j függetlenek. Ha az utóbbi teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ páronként függetlenek, ami gyengébb feltétel az együttes függetlenségnél.

(Azaz ha együttesen függetlenek, akkor páronként is, de fordítva nem igaz.) (Lásd 2.1.5. Példa.)

- ▶ (1) pl. $n = 3$ -ra abból sem következik, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$
(Össznépi gyakorlat: 2.2. feladat)

Több esemény függetlensége

Emlékeztető: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

(2.1.4. Definíció.) Az $A_1, \dots, A_n$ események (együttesen) függetlenek, ha minden $I \subseteq [n]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Más szavakkal az események közül valahány metszetének valószínűsége a valószínűségek szorzata.

Ez a bonyolult definíció szükséges, ugyanis:

- ▶ (1) nem következik abból, hogy bármely $i, j \in [n]$, $i \neq j$ esetén A_i és A_j függetlenek. Ha az utóbbi teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ páronként függetlenek, ami gyengébb feltétel az együttes függetlenségnél.

(Azaz ha együttesen függetlenek, akkor páronként is, de fordítva nem igaz.) (Lásd 2.1.5. Példa.)

- ▶ (1) pl. $n = 3$ -ra abból sem következik, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$
(Össznépi gyakorlat: 2.2. feladat)

2.2. feladat

Legyen $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbb{P}(a) = \frac{1}{27}$, $\mathbb{P}(b) = \frac{14}{27}$,
 $\mathbb{P}(c) = \mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(e) = \frac{4}{27}$ és

$$A_1 = \{d, e, a\}, \quad A_2 = \{c, e, a\}, \quad A_3 = \{c, d, a\}.$$

- (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$.
- (b) Mutassuk meg, hogy A_1, A_2, A_3 nem függetlenek.

Megjegyzés 1: Itt a $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(\{a\})$ egyszerűsített jelölést használtuk (és hasonlóan a többi elemi eseményre).

Megjegyzés 2: Itt bár Ω véges, a valószínűségi mező nem klasszikus.

Feltételes valószínűség

Példa: kockadobás szabályos dobókockával, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Tudjuk:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Tegyük fel, hogy úgy dobunk a kockával, hogy nem látjuk az eredményt, és valaki megmondja nekünk, hogy a dobott szám **páros**.

Hogyan változnak a valószínűségek ezen **extra információ** ismeretében?

Erre a helyzetre új valószínűségeket vezetünk be, jelöljük ezeket $\tilde{\mathbb{P}}$ -vel (egyelőre – hamarosan lesz jobb jelölés). Az intuíció, illetve a valószínűségi mérték definíciója szerint:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

és

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Feltételes valószínűség

Példa: kockadobás szabályos dobókockával, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Tudjuk:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Tegyük fel, hogy úgy dobunk a kockával, hogy nem látjuk az eredményt, és valaki megmondja nekünk, hogy a dobott szám **páros**.

Hogyan változnak a valószínűségek ezen **extra információ** ismeretében?

Erre a helyzetre új valószínűségeket vezetünk be, jelöljük ezeket $\tilde{\mathbb{P}}$ -vel (egyelőre – hamarosan lesz jobb jelölés). Az intuíció, illetve a valószínűségi mérték definíciója szerint:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

és

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Feltételes valószínűség

(2.2.1. Definíció.) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$. Ekkor a B esemény A -ra vett feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Kiolvasva: „ B valószínűsége, feltéve A ”.

- ▶ A formula nem szimmetrikus, A és B szerepei különbözők.
Kell: $\mathbb{P}(A) > 0$. Nem kell: $\mathbb{P}(B) > 0$ (és ha $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B) = 0$, akkor $\mathbb{P}(B|A) = 0$ is teljesül).
- ▶ **Állítás:** Ha A, B események és $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
(Intuíció: A bekövetkezése nem befolyásolja B valószínűségét.)
- ▶ (2.2.2. Példa: kockadobás extra információval)

Feltételes valószínűség

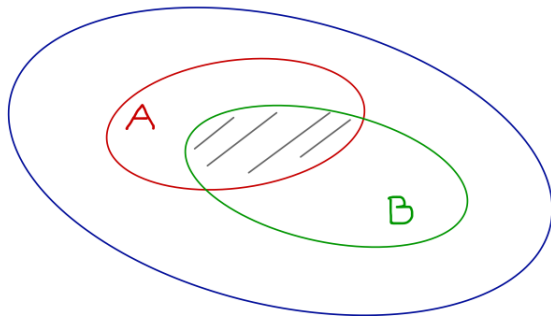
(2.2.1. Definíció.) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$. Ekkor a B esemény A -ra vett feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Kiolvasva: „ B valószínűsége, feltéve A ”.

- ▶ A formula nem szimmetrikus, A és B szerepei különbözők.
Kell: $\mathbb{P}(A) > 0$. Nem kell: $\mathbb{P}(B) > 0$ (és ha $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B) = 0$, akkor $\mathbb{P}(B|A) = 0$ is teljesül).
- ▶ **Állítás:** Ha A, B események és $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
(Intuíció: A bekövetkezése nem befolyásolja B valószínűségét.)
- ▶ (2.2.2. Példa: kockadobás extra információval)

Feltételes valószínűség



$$P(A) = \frac{\text{red oval}}{\text{blue oval}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{shaded intersection}}{\text{green oval}}$$

Feltételes valószínűség

(2.2.3. Állítás.) Minden $A \in \mathcal{F}$ -re, amelyre $\mathbb{P}(A) > 0$ teljesül, a

$$\mathbb{P}(\cdot | A): \mathcal{F} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}(B | A)$$

függvény egy valószínűségi mérték.

- ▶ (Bizonyítás: előadáson)
- ▶ Miért hasznos ez? Mert minden korábbi állítás igaz $\mathbb{P}(\dots)$ helyett $\mathbb{P}(\dots | A)$ -val is.

Várható fennmaradó élettartam/halálozási valószínűség

8 National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, April 19, 2006

Table 1. Life table for the total population: United States, 2003

[Click here for spreadsheet version](#)

Age	Probability of dying between ages x to $x+1$	Number surviving to age x	Number dying between ages x to $x+1$	Person-years lived between ages x to $x+1$	Total number of person-years lived above age x	Expectation of life at age x
	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$e(x)$
0-1	0.006865	100,000	687	99,394	7,743,016	77.4
1-2	0.000469	99,313	47	99,290	7,643,622	77.0
2-3	0.000337	99,267	33	99,250	7,544,332	76.0
3-4	0.000254	99,233	25	99,221	7,445,082	75.0
4-5	0.000194	99,208	19	99,199	7,345,861	74.0
5-6	0.000177	99,189	18	99,180	7,246,663	73.1
6-7	0.000160	99,171	16	99,163	7,147,482	72.1
7-8	0.000147	99,156	15	99,148	7,048,319	71.1
8-9	0.000132	99,141	13	99,134	6,949,171	70.1
9-10	0.000117	99,128	12	99,122	6,850,036	69.1
10-11	0.000109	99,116	11	99,111	6,750,914	68.1
11-12	0.000118	99,105	12	99,100	6,651,803	67.1
12-13	0.000157	99,094	16	99,086	6,552,704	66.1
13-14	0.000233	99,078	23	99,067	6,453,618	65.1
14-15	0.000339	99,055	34	99,038	6,354,551	64.2
15-16	0.000460	99,022	46	98,999	6,255,513	63.2
16-17	0.000577	98,976	57	98,947	6,156,514	62.2
17-18	0.000684	98,919	68	98,885	6,057,566	61.2
18-19	0.000769	98,851	76	98,813	5,958,681	60.3
19-20	0.000832	98,775	82	98,734	5,859,868	59.3

Példa

(Mihai Nica YouTube-csatornája nyomán)

Tegyük fel, hogy van két testvér, és tudjuk, hogy kettejük közül az egyik fiú. Ennek ismeretében a valószínűsége, hogy a másik is fiú?
Mit tippelnénk?

Példa

(Mihai Nica YouTube-csatornája nyomán)

Tegyük fel, hogy van két testvér, és tudjuk, hogy kettejük közül az egyik fiú. Ennek ismeretében a valószínűsége, hogy a másik is fiú?

Mit tippelnénk?

Figyelem, nem tudjuk, hogy akiről tudjuk, hogy fiú, az az idősebb vagy a fiatalabb testvér!

Példa

(Mihai Nica YouTube-csatornája nyomán)

Tegyük fel, hogy van két testvér, és tudjuk, hogy kettejük közül az egyik fiú. Ennek ismeretében a valószínűsége, hogy a másik is fiú?

Mit tippelnénk?

Figyelem, nem tudjuk, hogy akiről tudjuk, hogy fiú, az az idősebb vagy a fiatalabb testvér!

Az eseménytér lehet pl. $\Omega = \{LL, LF, FL, FF\}$, ahol pl.

$FL = \{\text{az idősebb fiú, a fiatalabb lány}\}$, és a valószínűségi mező klasszikus (kedvező/összes képlettel számolhatunk). Ekkor a kért feltételes valószínűség

$$\mathbb{P}(\{FF\}|\{FF, FL, LF\}) = \frac{1}{3}.$$

Példa

(Mihai Nica YouTube-csatornája nyomán)

Tegyük fel, hogy van két testvér, és tudjuk, hogy kettejük közül az egyik fiú. Ennek ismeretében a valószínűsége, hogy a másik is fiú? Mit tippelnénk?

Figyelem, nem tudjuk, hogy akiről tudjuk, hogy fiú, az az idősebb vagy a fiatalabb testvér!

Az eseménytér lehet pl. $\Omega = \{LL, LF, FL, FF\}$, ahol pl.

$FL = \{\text{az idősebb fiú, a fiatalabb lány}\}$, és a valószínűségi mező klasszikus (kedvező/összes képlettel számolhatunk). Ekkor a kért feltételes valószínűség

$$\mathbb{P}(\{FF\}|\{FF, FL, LF\}) = \frac{1}{3}.$$

Érdekesség: ha azt tudjuk, hogy a két testvér közül az egyik fiú és ketten született, és megint azt kérdezzük, hogy mi a valószínűsége, hogy a másik testvér is fiú, akkor más választ kapunk – annak ellenére, hogy azt tesszük fel, hogy mindkét gyerek egymástól függetlenül a hét minden napján $\frac{1}{7}$ valószínűséggel született.

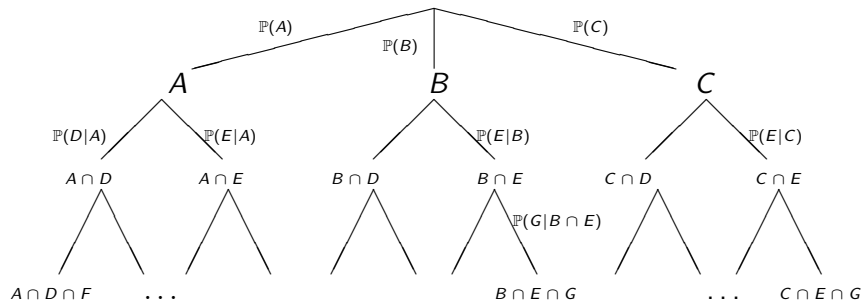
→ Házi feladat (vagy megtalálható Mihai Nica csatornáján).

Többlépcsős kísérletek

Több lépésben futtatott véletlen kísérleteket fa alakban is ábrázolhatunk:

- ▶ **A fa csúcsai:** Az adott lépcsőfok eredményei
- ▶ **A fa élei:** az adott kimenet **feltételes valószínűségei**, feltéve az előző lépcsőfok eredményét
- ▶ **A fa levelei:** A kísérlet végeredményei a köztes eredményeknek megfelelően

Többlépcsős kísérletek: ábrázolás fa alakban



Többlépcsős kísérletek: szorzási szabály

A feltételes valószínűség definícióját átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A),$$

ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathbb{P}(A) > 0$. Ebből következik:

Szorzási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy kimenetel valószínűségét azon út élei menti (feltételes) valószínűségek szorzata adja, amely az ezen eredményt tartalmazó levélhez vezet.

► (2.2.7. Példa: háromszori kártyahúzás)

► Formálisabban kimondva:

(2.2.8. Állítás [Szorzási szabály].) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k).$$

► A bizonyításhoz elég kibontani a feltételes valószínűség definícióját és egyszerűsíteni a szorzatot.

Többlépcsős kísérletek: szorzási szabály

A feltételes valószínűség definícióját átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A),$$

ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathbb{P}(A) > 0$. Ebből következik:

Szorzási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy kimenetel valószínűségét azon út élei menti (feltételes) valószínűségek szorzata adja, amely az ezen eredményt tartalmazó levélhez vezet.

► (2.2.7. Példa: háromszori kártyahúzás)

► Formálisabban kimondva:

(2.2.8. Állítás [Szorzási szabály].) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k).$$

► A bizonyításhoz elég kibontani a feltételes valószínűség definícióját és egyszerűsíteni a szorzatot.

Teljes valószínűség tétele

(2.2.5. Definíció.) Egy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ eseménysorozatot **teljes eseményrendszer**nek hívunk, ha

- ▶ az események páronként kizáróak (vagyis $\forall i, j \in [n], i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$)
- ▶ és $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Teljes valószínűség tétele

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Megjegyzések:

- ▶ A halmazelméletben (a valószínűségi számítási alkalmazástól elvonatkoztatva) a 2.2.5. Definíció feltételeinek teljesülése esetén azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ az Ω egy **partíciója**.
- ▶ A TVT igaz akkor is, ha $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$ helyett csak $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ teljesül, illetve $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ helyett csak $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$. Később látni fogjuk, hogy ezek a feltételek nem egészen ekvivalensek.
- ▶ A TVT igaz események egy végtelen sorozatára ($A_1, \dots, A_n$ helyett egy $A_1, A_2, \dots$ sorozatra) is, ha ezek páronként kizáróak, uniójuk Ω és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re teljesül.

Többlépcsős kísérletek: összeadási szabály

Másképp megfogalmazva a teljes valószínűség tételét:

Összeadási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy esemény valószínűségét azon kimeneteknek a leveleknél (a szorzási szabállyal) megkapható valószínűségeit összeadva kapjuk, amelyek az eseményhez tartoznak.

Teljes valószínűség tétele

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.2.6. Példa: Monty Hall-paradoxon)

Bayes-tétel

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B | A)$ -t könnyen ki tudjuk számolni, de valójában $\mathbb{P}(A | B)$ -ra vagyunk kíváncsiak.

(Példa a jegyzetből: Bayes-paradoxon/röntgenvizsgálat)

(2.4.1. Állítás [Egyszerű Bayes-tétel].) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A) > 0$ és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}.$$

(Bizonyítás: a definíciók behelyettesítésével rögtön következik)

A TVT-vel kombinálva kapjuk a Bayes-tétel általános alakját.

(2.4.2. Állítás [Bayes-tétel].) Legyenek $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(B) > 0$ és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, továbbá $A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.4.3. Példa: röntgenvizsgálat)
- ▶ (Ha marad idő: össznépi 2.16. feladat)

Bayes-tétel

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B | A)$ -t könnyen ki tudjuk számolni, de valójában $\mathbb{P}(A | B)$ -ra vagyunk kíváncsiak.

(Példa a jegyzetből: Bayes-paradoxon/röntgenvizsgálat)

(2.4.1. Állítás [Egyszerű Bayes-tétel].) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A) > 0$ és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}.$$

(Bizonyítás: a definíciók behelyettesítésével rögtön következik)

A TVT-vel kombinálva kapjuk a Bayes-tétel általános alakját.

(2.4.2. Állítás [Bayes-tétel].) Legyenek $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(B) > 0$ és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, továbbá $A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.4.3. Példa: röntgenvizsgálat)
- ▶ (Ha marad idő: összefoglaló 2.16. feladat)

Össznépi gyakorlat: 2.16. feladat

Egy hipotetikus mesterséges intelligenciát megkérdezünk, hogy egy adott állítás szerinte igaz-e vagy hamis. Mi tudjuk, hogy az állítás igaz. A mesterséges intelligencia az interneten keres a kérdésre adott válaszok közül, és amilyen arányban az “igaz” válasszal találkozott, olyan valószínűséggel ad “igaz” választ ő is.

Tudjuk, hogy az interneten összesen 2 forrásban szerepel vagy az “igaz”, vagy a “hamis” válasz a kérdésre, és mindkét válasz egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel „igaz” vagy „hamis”. Feltéve, hogy a mesterséges intelligencia helyes választ adott, mennyi a valószínűsége, hogy mindkét forrásban a helyes válasz szerepelt?

Karger algoritmus (kiegészítő anyag)

Tekintsünk egy $G = (V, E)$ irányítatlan, nem feltétlenül egyszerű gráfot, ahol többszörös élek megengedettek, hurokélek nem.

G egy **vágása** egy $V = A \cup B$ felbontás, ahol A és B diszjunktak. A vágás **minimális**, ha A és B között a lehető legkevesebb él fut.

Rögzített $s, t \in V$ esetén s -ből t -be a Ford–Fulkerson-algoritmussal megkaphatjuk a minimális vágást $\rightarrow$ lásd folyamatok.

Most: **globális** minimális vágást keresünk s és t rögzítése nélkül.

Alkalmazások: hálózatok stabilitásának elemzése, klaszterelemzés...

Karger algoritmus (avagy a randomizált MinCut algoritmus) egy véletlent használó algoritmus.

- ▶ Inputja: egy $G = (V, E)$ irányítatlan (multi)gráf. (Pl. mátrixszal megadva, az i -edik sor és a j -edik oszlop kereszteződésénél az i -edik és j -edik csúcsok közötti élek száma szerepel.)
- ▶ Outputja: az élek egy részhalmaza (szerencsés esetben egy globális minimális vágás).

Karger algoritmus

Algoritmus:

1. Válasszunk véletlenszerűen egy élet az összes meglévő él közül.
2. Húzzuk össze az él két végpontját egy új csúcscsá és távolítsuk el az éleket ezen két csúcs között. (A két régi csúcs szomszédai a kapott új csúcs szomszédai lesznek.)
3. Ismételjük az 1. és 2. lépéseket egészen addig, amíg csak két csúcs marad (vagyis $n - 2$ -szer).

A kapott két csúcs mindenképpen egy vágást határoz meg (A a végső gráf első csúcsába olvasztott eredeti csúcsok halmaza, B a végső gráf második csúcsába olvasztottaké), de nem biztos, hogy ez a vágás minimális.

Karger algoritmus: siker valószínűsége

(2.3.1. Állítás.) A Karger-algoritmus egyszeri futtatása esetén legalább $\frac{2}{n^2}$ eséllyel globális minimális vágást kapunk.

(Bizonyítás)

Futtassuk le $\frac{1}{2}n^2$ -szer az algoritmust. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egyszer sem találtunk minimális vágást, az egyes kísérletek függetlenség miatt

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} < \frac{1}{e}.$$

Vagyis kb. 0,6321 valószínűséggel találunk minimális vágást.

Ha pedig az ismétlések száma n^2 -nél gyorsabban nő, amint $n \rightarrow \infty$ (pl. $n^2 \ln n$ az ismétlések száma), akkor 1-hez tartó valószínűséggel találunk.

Monte Carlo- és Las Vegas-algoritmus

A véletlent használó algoritmusok két nagy csoportja:

- ▶ **Monte Carlo-algoritmus:** A lépésszám rögzített, nem függ a véletlentől, de az algoritmus bizonyos pozitív valószínűséggel hibás eredményt ad.
Példa: Fermat-prímteszt, RSA és variánsaik. Ilyen a Karger-algoritmus is.
- ▶ **Las Vegas-algoritmus:** Az algoritmus mindig helyes eredményt ad, de a lépésszám véletlen, és előfordulhat, hogy „átlagos esetben” lényegesen jobb, mint a legrosszabb esetben.
Példa: randomized QuickSort (lásd később).

Példák klasszikus valószínűségi mezőkre –
kombinatorika, urnamodellek

Klasszikus valószínűségi mezők

Emlékeztető: klasszikus valószínűségi mező: Ω véges, minden kimenetel/elemi esemény azonos valószínűségű.

Erre nézünk ma néhány klasszikus példát.

Ezek az ún. *urnamodellek*, ahol egy urnában (zsákban stb.) különböző tulajdonságú golyók vannak, és ezekből húzunk néhányat, visszatevéssel vagy anélkül, a sorrend figyelembevételével vagy anélkül.

A cél egy adott véletlen kísérlet **modellezése** alkalmas valószínűségi mezővel. A modell helyes megválasztása döntő jelentőségű, de nem feltétlenül csak egy helyes modell létezik.

A „kedvező esetek számának” és az „összes eset számának” meghatározásához először átismétljük a kombinatorika alapvető mennyiségeit, az ún. **elemi leszámolásokat**. Ez részben középiskolai anyag, és régen a BSz2-höz tartozott, a BSc-reform után tavaly került a Valszámhoz.

Variációk

(Definíció.) Legyenek k, n természetes számok.

n elem k -ad osztályú variációja: n különböző elem közül k különböző elem sorrendje. Ezt $0 \leq k \leq n$ esetén definiáljuk.

Számuk: $V(n, k)$.

n elem k -ad osztályú ismétléses variációja: n különböző elemből k hosszú sorrend, ismétlés megengedett. Itt $k > n$ lehetséges.

Számuk: $V_{\text{ism}}(n, k)$.

Használjuk a faktoriális szokásos jelölését:

$$n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Ez alapján $0! = 1$ (üres szorzat értéke mindig 1, üres összegé 0).

(Tétel.) $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval, lásd előadás)

(Tétel.) $V_{\text{ism}}(n, k) = n^k$.

(Bizonyítás: hasonlóan, lásd előadás)

Variációk

(Definíció.) Legyenek k, n természetes számok.

n elem k -ad osztályú variációja: n különböző elem közül k különböző elem sorrendje. Ezt $0 \leq k \leq n$ esetén definiáljuk.

Számuk: $V(n, k)$.

n elem k -ad osztályú ismétléses variációja: n különböző elemből k hosszú sorrend, ismétlés megengedett. Itt $k > n$ lehetséges.

Számuk: $V_{\text{ism}}(n, k)$.

Használjuk a faktoriális szokásos jelölését:

$$n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Ez alapján $0! = 1$ (üres szorzat értéke mindig 1, üres összegé 0).

(Tétel.) $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval, lásd előadás)

(Tétel.) $V_{\text{ism}}(n, k) = n^k$.

(Bizonyítás: hasonlóan, lásd előadás)

Példák a variációkra

(Ismétlés nélküli) variációk: pl. autóverseny első k helyezettjének lehetséges sorrendjei (lásd össznépi gyakorlat: 1.13. feladat)

A variációkhoz kapcsolódó **urnamodell**: egy urnában van n különböző golyó, visszatevés nélkül kihúzunk k darabot.

Lehetséges kimenetek: a húzott k golyó lehetséges sorrendjei.

Egy lehetséges klasszikus valószínűségi mező erre a kísérletre:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú variációi}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (minden részhalmaz esemény), $\mathbb{P}(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{V(n,k)} = \frac{(n-k)!}{n!}$, $\forall \omega \in \Omega$.

Példák a variációkra 2.

Ismétléses variációk: pl. totó: 13+1 kérdés, mindegyikre 3 lehetséges válasz $\rightarrow V_{\text{ism}}(3, 14) = 3^{14}$ -féleképpen tölthető ki.

Az ismétléses variációkhoz kapcsolódó **urnamodell**: egy urnában van n különböző golyó, k -szor húzunk egy-egy golyót úgy, hogy a húzott golyót mindig visszatesszük.

Lehetséges kimenetek: a húzott k golyó lehetséges sorrendjei.

Egy lehetséges klasszikus valószínűségi mező erre a kísérletre:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{V_{\text{ism}}(n, k)} = \frac{1}{n^k}, \forall \omega \in \Omega.$$

Ezt az urnamodellt **Maxwell–Boltzmann**–urnamodellnek szokás nevezni $\rightarrow$ statisztikus fizika.

(Az ilyen elnevezéseket nem kell megtanulni.)

Halmazok Descartes-szorzata, Ω megválasztása

Előző példa: $\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\} \longrightarrow$
mivel reprezentálhatjuk kényelmesen ennek a halmaznak az
elemeit?

Ehhez (és sok minden máshoz) vezessük be a következő
fogalmat/jelölést:

(Def.) n halmaz, $H_1, \dots, H_n$ **Descartes-szorzatán** azon $(x_1, \dots, x_n)$
rendezett n -esek halmazát értjük, amelyekre $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$.
Ezt a halmazt $H_1 \times \dots \times H_n$ -nel jelöljük.

Ha $H_1 = \dots = H_n = H$ (valamely H halmazra), akkor használjuk a
 $H^n = \underbrace{H \times \dots \times H}_{n \text{ darab}}$ jelölést is.

Ismert példa: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ darab}}$ a rendezett valós szám- n -esek
("n magas számoszlopok") halmaza.

Halmazok Descartes-szorzata, Ω megválasztása

Előző példa: $\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\} \longrightarrow$
mivel reprezentáljuk ennek a halmaznak az elemeit?

Egy lehetséges kimenetel egy lehetséges ábrázolása például:
 $(x_1, \dots, x_k)$, ahol x_i az i -ediként húzott elem, az urnában lévő
golyók halmazának egyik eleme.

Legyen H az urnában lévő golyók halmaza. Ekkor Ω egy lehetséges
megválasztása:

$$\Omega = \underbrace{H \times H \times \dots H}_{k \text{ darab}} = H^k.$$

(És $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\omega) = 1/n^k$, $\forall \omega \in \Omega$.)

Pl. kockadobás 2 megkülönböztethető dobókockával (vagy kétszer
egymás után ugyanazzal a kockával): $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = [6]^2$.
Tipikus elemek pl. $(3, 4)$: az első dobás hármas, a második négyes,
 $(5, 5)$: mindkét dobás ötös.

Descartes-szorzat és ismétlés nélküli variációk

Még korábbi példa:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ismétlés nélküli variációi}\}.$

Megfigyelés: ha H az urnában lévő golyók halmaza, akkor $\Omega = H^k$ továbbra is lehetséges választás, hiszen minden kimenetel megadható $(x_1, \dots, x_k)$ alakban (x_i : i -edikként húzott elem).

Azonban ez $n > k > 1$ esetén nem lesz klasszikus valószínűségi mező, ugyanis pl. az $(x_1, x_1, x_3, \dots, x_k)$ alakú elemek nem lehetséges kimenetek. Itt

$$\mathbb{P}((x_1, \dots, x_k)) = \begin{cases} \frac{1}{V(n,k)}, & \text{ha } x_1, \dots, x_k \text{ páronként különbözőek,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Egy másik lehetséges választás például

$$\Omega' = \{(x_1, \dots, x_k) \in H^k \mid x_1, \dots, x_k \text{ páronként különbözőek}\}.$$

Ezt használva klasszikus valószínűségi mezőt kaphatunk.

Permutációk 1.

(1. Def.) n elem permutációja: n különböző elem sorrendje.

(Állítás.) n elem permutációinak száma: $n!$.

(Bizonyítás: Ez a variációk speciális esete $k = n$ választással.)

Ez alapján a kapcsolódó urnamodell is a variációkhoz tartozó urnamodell speciális esete. Egy urnában van n különböző golyó, egymás után mindig húzunk egyet visszatevés nélkül, amíg el nem fogynak, lehetséges kimenetelek a húzott golyók sorrendjei.

Az $[n] = \{1, \dots, n\}$ elemei permutációinak halmazát S_n -nel jelöljük. (Az S betű itt arra utal, hogy ezt a halmazt n -edfokú szimmetrikus csoportnak nevezzük – azt itt nem tárgyaljuk, hogy miért.)

Példa, ahol $\Omega = S_n$ jó választás és klasszikus valószínűségi mezőt kapunk: össznépi gyakorlat (1.14. feladat, algel style)

Permutációk 2.

Ekvivalens, gyakrabban használt definíció:

(2. Def.) Az $[n]$ halmaz önmagára való, kölcsönösen egyértelmű leképezéseit (azaz *bijekcióit*) nevezzük (n -edrendű) **permutációknak**.

A permutációkat általában görög betűkkel (π, σ stb.) jelöljük.

Szokásos jelölés például: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: ez az a $\pi: [3] \rightarrow [3]$

permutáció, amelyre $\pi_1 := \pi(1) = 3$, $\pi_2 = 2$ és $\pi_3 = 1$.

Röviden szokták ezt néha a $3\ 2\ 1$ permutációnak is nevezni, bár ez a jelölés kissé elavult.

Permutációkkal BSz1-ből, a mátrixok determinánsának témakörénél már találkoztunk.

Minden n -edrendű permutációhoz tartozik egy **bástyaelhelyezés**, illetve BSz-ből definiáltuk a permutáció **inverziószámát** is.

Gyakori félreértés: maga a permutáció egy $[n] \rightarrow [n]$ függvény, nem pedig a hozzá tartozó bástyaelhelyezés.

Ismétléses permutációk

(Def.) Legyenek $n, l, k_1, \dots, k_l$ természetes számok úgy, hogy $n = k_1 + \dots + k_l$. n elem **ismétléses permutációja** ($k_1, \dots, k_l$ paraméterekkel) n olyan elem sorbarendezése, ahol k_1 elem egyforma, k_2 elem tőlük különböző, de egyforma, és így tovább, végül k_l elem az összes korábbtól különböző, de egyforma.

(Tétel.) Számuk

$$\frac{n!}{k_1! \dots k_l!}.$$

(Bizonyítás)

Megjegyzés: a korábban definiált permutációkat *ismétlés nélküli permutációknak* is nevezzük. Ezek olyan ismétléses permutációk, ahol $l = n$ és $k_1 = \dots = k_n = 1$ (vagyis bármely két elem megkülönböztethető).

Urnamodell az ismétléses permutációkra

Egy urnában van $n = k_1 + \dots + k_l$ golyó, amikből k_1 egyforma, k_2 golyó tőlük különböző, de egyforma, és így tovább, végül k_l golyó az összes korábbtól különböző, de egyforma.

Egymás után mindig húzunk egy-egy golyót visszatevés nélkül, amíg el nem fogynak, lehetséges kimenetek a húzott golyók sorrendjei.

Klasszikus valószínűségi mező erre az urnamodelldre:

$$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó ism. permutációi } k_1, \dots, k_l \text{ paraméterekkel}\},$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\omega) = \frac{k_1! \dots k_l!}{n!}, \forall \omega \in \Omega.$$

Ismétlés nélküli kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok, amelyekre $0 \leq k \leq n$.
 n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja n elemből k darab kiválasztása, ahol a sorrend nem számít. Számuk: $C(n, k)$

(Tétel.) $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Bizonyítás – kapcsolat az ismétlés nélküli variációkkal)

Szokásos jelölés:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{binomiális együttható}} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

binomiális együttható

Tulajdonságok (a középiskolából/más egyetemi tárgyakból is ismertek?):

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. (Lásd Pascal-háromszög.)
- ▶ Binomiális tétel: lásd analízis. Egyszerű eset:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ha n pozitív egész és $a, b > 0$.
Fontos speciális eset: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Ismétlés nélküli kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok, amelyekre $0 \leq k \leq n$.
 n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja n elemből k darab kiválasztása, ahol a sorrend nem számít. Számuk: $C(n, k)$

(Tétel.) $C(n, k) = \frac{n!}{k! (n-k)!}$.

(Bizonyítás – kapcsolat az ismétlés nélküli variációkkal)

Szokásos jelölés:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{binomiális együttható}} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

binomiális együttható

Tulajdonságok (a középiskolából/más egyetemi tárgyakból is ismertek?):

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. (Lásd Pascal-háromszög.)
- ▶ Binomiális tétel: lásd analízis. Egyszerű eset:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ha n pozitív egész és $a, b > 0$.
Fontos speciális eset: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Urnamodell az ismétlés nélküli kombinációkra

Van n különböző golyónk egy urnában, k darabot húzunk belőlük visszatevés nélkül, a sorrend nem számít.

$$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi}\},$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{C(n,k)} = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k! (n-k)!}{n!}, \forall \omega \in \Omega.$$

Pl. 5-ös lottó: $n = 90$, $k = 5$.

Egy lehetséges kitöltés $\frac{1}{\binom{90}{5}} = 2,27535075214449 \cdot 10^{-8}$
valószínűséggel telitalálatos.

Mikor számít a sorrend? (ismétlés nélküli eset)

Gyakori modellezési kérdés: **számít-e a sorrend?**

Ez sokszor egyértelmű, de nem mindig. Esetenként több helyes modell is lehet. Ha egy feladat megoldható **ismétlés nélküli** variációkkal és kombinációkkal is, akkor mindkét módszer ugyanazt az eredményt adja.

Pl. 17. feladat az 1. feladatsoron:

Magda anyó 20 lottószelvényt tölt ki véletlenszerűen (szelvényenként 5 számot választ ki az 1 és 90 közötti számok közül egymástól függetlenül). Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:

(a) Bármely két szelvény különböző.

(c) Bármely két szelvény különböző, és a 7-es szám pontosan 7 szelvényen szerepel.

Ez a feladat megoldható úgyis, hogy a 20 szelvény sorrendjét figyelembe vesszük (azaz a szelvényeket megkülönböztethetőknek tekintjük) és úgy is, hogy nem vesszük figyelembe (azaz nem tekintjük őket megkülönböztethetőknek).

Erre utal a megoldás kétféle kifejezése a Végeredmények fájlban.

Ismétléses kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok. n elem k -adosztályú ismétléses kombinációja n -féle elemtípusból k elem kiválasztása, ismétlődés megengedett.

Számuk: $C_{\text{ism}}(n, k)$. (Itt $k > n$ lehetséges.)

Pl.: n -féle süteményből k darabot veszünk.

Ismétléses kombinációk megadása: 0–1-sorozatokkal.

Ha $a_1, \dots, a_n \geq 0$ és $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$, az ehhez tartozó ismétléses kombinációt („az 1. fajta süteményből a_1 darabot, és így tovább, az n . fajtából a_n darabot veszünk”) így kódoljuk:

$$\underbrace{1 \dots 1}_a 0 \underbrace{1 \dots 1}_b 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_c.$$

a_1 db a_2 db a_n db

Pl. $12 = 6 + 0 + 0 + 3 + 2 + 1$ kódolása: 11111100011101101.

Egy ilyen kódban mindig $n - 1$ darab nulla és k darab egyes van. Így tehát ezek mindig $n + k - 1$ hosszú 0–1-sorozatok, amelyekből k helyre írunk egyest. Ebből következik:

(Tétel.) $C_{\text{ism}}(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Ismétléses kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok. n elem k -adosztályú ismétléses kombinációja n -féle elemtípusból k elem kiválasztása, ismétlődés megengedett.

Számuk: $C_{\text{ism}}(n, k)$. (Itt $k > n$ lehetséges.)

Pl.: n -féle süteményből k darabot veszünk.

Ismétléses kombinációk megadása: 0–1-sorozatokkal.

Ha $a_1, \dots, a_n \geq 0$ és $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$, az ehhez tartozó ismétléses kombinációt („az 1. fajta süteményből a_1 darabot, és így tovább, az n . fajtából a_n darabot veszünk”) így kódoljuk:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{a_1 \text{ db}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_2 \text{ db}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_n \text{ db}}.$$

Pl. $12 = 6 + 0 + 0 + 3 + 2 + 1$ kódolása: 11111100011101101.

Egy ilyen kódban mindig $n - 1$ darab nulla és k darab egyes van. Így tehát ezek mindig $n + k - 1$ hosszú 0–1-sorozatok, amelyekből k helyre írunk egyest. Ebből következik:

(Tétel.) $C_{\text{ism}}(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Mikor számít a sorrend? (ismétléses eset)

Az ismétléses kombinációkhoz is tartozik egy urnamodell, ezt **Bose–Einstein**–urnamodellnek nevezzük. Szintén fizikai eredetű. Elve: k megkülönböztethetetlen golyót elhelyezünk n urnában, egy urnában több golyó is lehet, minden lehetséges konfiguráció azonos valószínűségű.

Figyelem: ez nagyon más, mint az ismétléses variációkhoz tartozó Maxwell–Boltzmann-urnamodell!

- ▶ Az ismétléses variációs urnamodell golyói megkülönböztethetők egymástól, az ismétléses kombinációs urnamodell golyói viszont nem.
- ▶ Az olyan szituációkban, ahol többször húzunk visszatevéssel „egymástól függetlenül” a golyók közül, az ismétléses variációs urnamodell a jó.
- ▶ Az ismétlés nélküli kombinációknál a sorrendet csak elhanyagoltuk, az ismétléses kombinációknál viszont nincs is értelme sorrendről beszélni, mert mindegyik golyót egyszerre helyezünk el.