

Valószínűesszámítás és statisztika – Folytonos valószínűségi változók, centrális határeloszlás-tétel

Tartalom

- ▶ Folytonos valószínűségi változók, eloszlásfüggvény folytonos esetben, sűrűségfüggvény, és ezek kapcsolata
- ▶ Várható érték folytonos esetben
- ▶ Nemnegatív valószínűségi változók várható értéke
- ▶ Folytonos valószínűségi változók transzformáltjának eloszlása, transzformált várható értéke (momentumok, szórás)
- ▶ Valószínűségi változók szimulációja
- ▶ Nevezetes folytonos eloszlások: egyenletes, exponenciális, normális
- ▶ De Moivre–Laplace-tétel, centrális határeloszlás-tétel

Előismeretek: Differenciál- és integrálszámítás egy dimenzióban, diszkrét valószínűségi változók

A normális eloszlásról szóló rész jelentős mértékben tartalmaz Pintér Márta 2022-es diaszorából átvett szövegeket.

Folytonos valószínűségi változók

Emlékeztető: Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, akkor valószínűségi változónak az olyan $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt nevezzük, amelyre $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Eddig: diszkrét val. változók, $\text{Ran}(X)$ megszámlálható (=véges vagy megszámlálhatóan végtelen).

Példák **folytonos** véletlen mennyiségekre, ahol az értékkészlet nem megszámlálható:

- ▶ Geometriai valószínűségi mező, „a $[0, 1]$ intervallumon *találomra* választunk egy pontot”, valószínűség a “területtel” (intervallumhosszal) arányos. A választott pont egy val. változó, értékkészlete $[0, 1]$ ($\rightarrow$ nem megszámlálható)
- ▶ Várakozási idők (pl. következő busz érkezéséig, villanykörte kiégéséig)
- ▶ A tőzsdén egy adott részvény értékének változása egy nap alatt (ennek az értéke lehet negatív is)
- ▶ Egy véletlenszerűen választott magyar állampolgár testmagassága, testsúlya stb.

Valószínűségi mértékek folytonossága (kiegészítő anyag)

A következő állítást nem bizonyítjuk. A jegyzetben most következő számos tételt könnyű bizonyítani, ha ezt ismerjük, különben pedig lehetetlen.

(Állítás: valószínűségi mértékek folytonossága felülről.) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots$ események egy **növekvő** sorozata, vagyis $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i \geq 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Megjegyzés: a $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat monoton növvő és felülről korlátos, tehát a határértéke valóban létezik.

(Állítás: valószínűségi mértékek folytonossága alulról.) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots$ események egy **csökkenő** sorozata, vagyis $A_i \supseteq A_{i+1}, \forall i \geq 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Megjegyzés: ez a felülről való folytonosságból és a végtelen De Morgan-azonosságból következik.

Eloszlásfüggvény

Miután $\{X < x\}$ esemény, értelmezett a $\mathbb{P}(\{X < x\})$ valószínűség, amit egyszerűsítve $\mathbb{P}(X < x)$ -szel jelöltünk már eddig is.

Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbb{P}(X < x)$ függvény igen hasznos, különösen akkor, amikor $\text{Ran}(X)$ nem véges, pláne ha nem is megszámlálható.

(4.1.2. Definíció.) Legyen X valószínűségi változó. Ekkor az $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X < x) \in [0, 1]$$

függvényt az X eloszlásfüggvényének nevezzük.

Egyszerű példa: szabályos érme feldobása, $\Omega = \{F, I\}$, $X(F) = 1$, $X(I) = 0$.

Rajzoljuk fel az X valószínűségi változó ($X(F) = 1$, $X(I) = 0$) eloszlásfüggvényét! (Lásd előadás.)

Figyeljük meg, hogy az eloszlásfüggvény nem folytonos – így lesz ez mindig, amikor X diszkrét val. változó. Viszont **balról folytonos**.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(a \leq X < b),$$

a valószínűség additivitása miatt.

Az eloszlásfüggvények karakterizálhatók is:

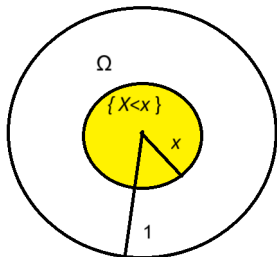
(4.1.3. Állítás.) Egy $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eloszlásfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak $\Leftrightarrow$

- (1) F (nem feltétlenül szigorúan) monoton nő,
- (2) F balról folytonos, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ -re $\lim_{y \uparrow x} F(y) = F(x)$,
- (3) és $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

- ▶ (Bizonyítás: $\Rightarrow$ irány)
- ▶ (Megjegyzés: konvenció az eloszlásfüggvény definíciójával kapcsolatban különböző országokban)

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Az egység sugarú körlap belsejében találomra választunk egy pontot. Jelölje X ezen pont és a kör középpontja távolságát. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.



Az eloszlásfüggvény meghatározásához először az értékkészletet adjuk meg: $\text{Ran}(X) = (0, 1)$ (ami nem megszámlálható).

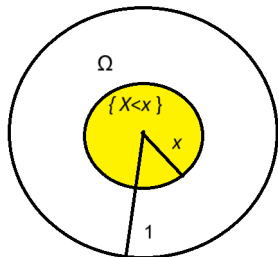
Definíció szerint az eloszlásfüggvény értéke az $x \in \mathbb{R}$ pontban $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Így tehát $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq 1$.

Mi a helyzet $x \in (0, 1)$ esetén?

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Az egység sugarú körlap belsejében találomra választunk egy pontot. Jelölje X ezen pont és a kör középpontja távolságát. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.



Az eloszlásfüggvény meghatározásához először az értékkészletet adjuk meg: $\text{Ran}(X) = (0, 1)$ (ami nem megszámlálható).

Definíció szerint az eloszlásfüggvény értéke az $x \in \mathbb{R}$ pontban $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Így tehát $F_X(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_X(x) = 1$, ha $x \geq 1$.

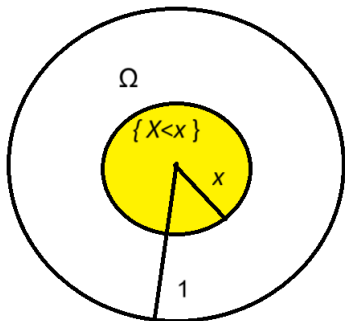
Mi a helyzet $x \in (0, 1)$ esetén?

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Eseménytérnek (Ω) választhatjuk például magát a körlapot.

Az $\{X < x\}$ esemény azon ω -k halmaza Ω -ból, amelyek a középponttól x -nél kisebb távolságra vannak.

Tehát $x \in (0, 1)$ esetén ez egy x sugarú, Ω -val koncentrikus nyílt körlap:



Tehát a geometriai valószínűség képlete szerint

$$\mathbb{P}(X < x) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\Omega}} = \frac{x^2 \pi}{1^2 \pi} = x^2.$$

Összefoglalva

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény **folytonos**, ellentétben a diszkrét példákkal.

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény **folytonos**, ellentétben a diszkrét példákkal.
Annak a valószínűsége, hogy X egy konkrét értéket felvesz, pl.
 $x = 1/3$ -ot vagy $x = 1/2$ -t, 0-val egyenlő. Ugyanis:

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = \lim_{y \downarrow x} F_X(y) - F_X(x) = F_X(x) - F_X(x) = 0,$$

ahol az utolsó előtti lépésben F_X folytonosságát használtuk.

(Megjegyzés: lehetetlen vs. 0 valószínűségű esemény, lásd előadás)

(Megjegyzés: nem megszámlálható unióra nem additív a valószínűség)

Tehát az $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ súlyfüggvény, ami diszkrét esetben hasznos volt, folytonos F_X esetén konstans 0, így nem használható.
Hasonló célú függvény helyette folytonos esetben? $\rightarrow$
sűrűségfüggvény.

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény **folytonos**, ellentétben a diszkrét példákkal.
Annak a valószínűsége, hogy X egy konkrét értéket felvesz, pl.
 $x = 1/3$ -ot vagy $x = 1/2$ -t, 0-val egyenlő. Ugyanis:

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = \lim_{y \downarrow x} F_X(y) - F_X(x) = F_X(x) - F_X(x) = 0,$$

ahol az utolsó előtti lépésben F_X folytonosságát használtuk.

(Megjegyzés: lehetetlen vs. 0 valószínűségű esemény, lásd előadás)

(Megjegyzés: nem megszámlálható unióra nem additív a valószínűség)

Tehát az $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ súlyfüggvény, ami diszkrét esetben hasznos volt, folytonos F_X esetén konstans 0, így nem használható.
Hasonló célú függvény helyette folytonos esetben? $\rightarrow$

sűrűségfüggvény.

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Ha $0 < x < 1$, akkor $F_X(x) = x^2$.

Kérdés (a sűrűségfüggvény bevezetéséhez): Mi a valószínűsége, hogy X az $1/4$, illetve a $3/4$ egy kis környezetébe esik?

Vagy általában: egy $0 < x < 1$ pont kis környezetébe, mondjuk $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ -be, ahol $\Delta x > 0$ olyan kicsi, hogy $x - \Delta x > 0$ és $x + \Delta x < 1$? Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) &= \mathbb{P}(x - \Delta x < X < x + \Delta x) \\&= \mathbb{P}(X < x + \Delta x, X \not\leq x - \Delta x) = \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X \leq x - \Delta x) \\&= \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X < x - \Delta x) \quad (\text{folyt.!!}) \\&= F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)\end{aligned}$$

Mindkét oldalt $2\Delta x$ -szel osztva, majd Δx -szel 0-hoz tartva az F_X eloszlásfüggvény **deriváltját** kapjuk:

$$\frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x} = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)}{2\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \downarrow 0} F'_X(x) = (x^2)' = 2x.$$

Kis Δx esetén $\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) \approx F'_X(x) \cdot 2\Delta x = 4x\Delta x$.

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Ha $0 < x < 1$, akkor $F_X(x) = x^2$.

Kérdés (a sűrűségfüggvény bevezetéséhez): Mi a valószínűsége, hogy X az $1/4$, illetve a $3/4$ egy kis környezetébe esik?

Vagy általában: egy $0 < x < 1$ pont kis környezetébe, mondjuk $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ -be, ahol $\Delta x > 0$ olyan kicsi, hogy $x - \Delta x > 0$ és $x + \Delta x < 1$? Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) &= \mathbb{P}(x - \Delta x < X < x + \Delta x) \\ &= \mathbb{P}(X < x + \Delta x, X \not\leq x - \Delta x) = \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X \leq x - \Delta x) \\ &= \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X < x - \Delta x) \quad (\text{folyt.!!}) \\ &= F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)\end{aligned}$$

Mindkét oldalt $2\Delta x$ -szel osztva, majd Δx -szel 0-hoz tartva az F_X eloszlásfüggvény **deriváltját** kapjuk:

$$\frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x} = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)}{2\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \downarrow 0} F'_X(x) = (x^2)' = 2x.$$

Kis Δx esetén $\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) \approx F'_X(x) \cdot 2\Delta x = 4x\Delta x$.

Bevezető példa (vö. ppzh 2024/25, 6. feladat)

Ha $0 < x < 1$, akkor $F_X(x) = x^2$.

Kérdés (a sűrűségfüggvény bevezetéséhez): Mi a valószínűsége, hogy X az $1/4$, illetve a $3/4$ egy kis környezetébe esik?

Vagy általában: egy $0 < x < 1$ pont kis környezetébe, mondjuk $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ -be, ahol $\Delta x > 0$ olyan kicsi, hogy $x - \Delta x > 0$ és $x + \Delta x < 1$? Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) &= \mathbb{P}(x - \Delta x < X < x + \Delta x) \\&= \mathbb{P}(X < x + \Delta x, X \not\leq x - \Delta x) = \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X \leq x - \Delta x) \\&= \mathbb{P}(X < x + \Delta x) - \mathbb{P}(X < x - \Delta x) \quad (\text{folyt.!!}) \\&= F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)\end{aligned}$$

Mindkét oldalt $2\Delta x$ -szel osztva, majd Δx -szel 0-hoz tartva az F_X eloszlásfüggvény **deriváltját** kapjuk:

$$\frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x} = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)}{2\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \downarrow 0} F'_X(x) = (x^2)' = 2x.$$

Kis Δx esetén $\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) \approx F'_X(x) \cdot 2\Delta x = 4x\Delta x$.

Sűrűségfüggvény – felvezetés

- ▶ A példa alapján az F_X eloszlásfüggvény deriváltja bizonyos esetekben fontos mennyiség, ezt fogjuk sűrűségfüggvénynek nevezni.
- ▶ A sűrűségfüggvény következő definíciójában egy icipicit általánosabban nem az eloszlásfüggvény deriváltjáról lesz szó, hanem egy olyan függvényről, amelynek integrálja $(-\infty$ -től x -ig) az eloszlásfüggvény $F_X(x)$ értéke.
- ▶ Ez az általánosabb definíció megengedi, hogy pl. azt az esetet is kezeljük, amikor az eloszlásfüggvény folytonos, de csak véges sok pont kivételével differenciálható.
- ▶ Ilyen az előbbi példa is: F_X minden pontban folytonos és az $x = 0$ és $x = 1$ pontok kivételével differenciálható.
- ▶ Diszkrét esetben az eloszlásfüggvény deriváltja nem hasznos: pl. ha X egy kockadobás eredménye, akkor F_X az $1, 2, \dots, 6$ pontokban nem is differenciálható, és mindenhol máshol 0 a deriváltja.

Sűrűségfüggvény

(4.2.1. Definíció.) Egy X valószínűségi változót **folytonosnak** nevezünk, ha létezik olyan nemnegatív, valós $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amire az $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)dz$ improprius Riemann-integrál véges, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z)dz,$$

ahol (F_X az X val. változó eloszlásfüggvénye és) az integrál improprius Riemann-integrál.

Az f_X függvényt az X **sűrűségfüggvényének** hívjuk.

Megjegyzés: a folytonos val. változó ezen definíciója az *abszolút folytonos* val. változó fogalmának egy speciális esete, ami a gyakorlatban fontos példákat mind tartalmazza $\rightarrow$ az általános definíciót lásd a mértékelméleten alapuló valószínűségi tárgyaknál.

Sűrűségfüggvény

A Newton–Leibniz-tétel alapján, mivel a sűrűségfüggvény integrálja az eloszlásfüggvény, az eloszlásfüggvény deriváltja a sűrűségfv.

Itt nem probléma, ha az F_X eloszlásfüggvény deriváltja véges sok pontban nem létezik – ami a gyakorlatban igen hasznos lesz:

(4.2.2. Állítás.) Ha F_X folytonos és véges sok pont kivételével mindenhol deriválható, akkor X folytonos val. változó, és az

$$f(x) = \begin{cases} F'_X(x), & \text{ha } F_X \text{ differenciálható } x\text{-ben,} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye X -nek.

A 0 helyett itt írhatnánk pl. 42-t is, az integrálás szempontjából mindegy, ha véges sok pontban bárhogy megváltoztatjuk a sűrűségfüggvényt (ha nemnegatív marad).

(Egyszerű állítás.) Ha X folytonos, akkor F_X folytonos függvény.

Ez azért van, mert F_X monoton növekvő, tehát ha nem folytonos, akkor van egy ugrása fölfelé. Ekkor sűrűségfüggvénye nem létezhet.

Tehát: **semmilyen diszkrét val. változó nem folytonos!**

Sűrűségfüggvény

A Newton–Leibniz-tétel alapján, mivel a sűrűségfüggvény integrálja az eloszlásfüggvény, az eloszlásfüggvény deriváltja a sűrűségfv.

Itt nem probléma, ha az F_X eloszlásfüggvény deriváltja véges sok pontban nem létezik – ami a gyakorlatban igen hasznos lesz:

(4.2.2. Állítás.) Ha F_X folytonos és véges sok pont kivételével mindenhol deriválható, akkor X folytonos val. változó, és az

$$f(x) = \begin{cases} F'_X(x), & \text{ha } F_X \text{ differenciálható } x\text{-ben,} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye X -nek.

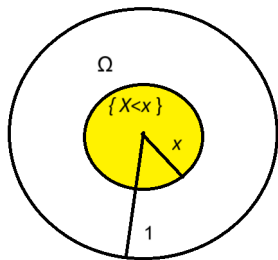
(Egyszerű állítás.) Ha X folytonos, akkor F_X folytonos függvény.

Ez azért van, mert F_X monoton növekvő, tehát ha nem folytonos, akkor van egy ugrása fölfelé. Ekkor sűrűségfüggvénye nem létezhet.

Tehát: **semmilyen diszkrét val. változó nem folytonos!**

Az Egyszerű állítás megfordítása nem igaz, illetve nem minden folytonos val. változó eloszlásfüggvénye differenciálható véges sok pont kivételével mindenhol. Példák, ahol F_X folytonos, de X nem $\rightarrow$ lásd BME-TTK-s mértékelméletes/valszínűségi tárgyak.

Sűrűségfüggvény a körös példában



Láttuk:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Ez (minden pontban) folytonos és **egy pont** (az 1) kivételével differenciálható. Tehát X sűrűségfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy ahol nem differenciálható, ott 0-nak választjuk, mindenhol máshol pedig $F'_X(x)$ -nek:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } x \geq 1, \\ 2x, & \text{ha } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Az $x = 0$ pontban differenciálható F_X , és ott is 0 a (mindkét oldali) deriváltja.

A sűrűségfüggvény karakterizációja

(4.2.5. Állítás.) Egy nemnegatív $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez akkor és csak akkor létezik X folytonos valószínűségi változó, aminek az f sűrűségfüggvénye, ha f Riemann-integrálható és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Bizonyítás:

- ▶ Könnyű irány: ha X folytonos val. változó, akkor f_X -re teljesül az egyenlet, lásd előadás.
- ▶ A másik irányról (ami a jegyzetben nem szerepel): ha $f \geq 0$ Riemann-integrálható és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, akkor $x \in \mathbb{R}$ -re

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(z) dz.$$

Könnyen ellenőrizhető: ekkor F teljesíti az eloszlásfüggvény tulajdonságait (jó határérték $\pm\infty$ -ben, mon. növe, balról folyt.).

A 4.1.3. Állítás visszairánya miatt (biz. lásd jegyzet) létezik olyan X val. változó, amelynek eloszlásfüggvénye F , így f pedig sűrűségfüggvénye X -nek.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Ezt a diát megcseréltem az előzővel, mert azt mondtam el előbb előadáson.

(4.2.4. Állítás.) Legyen X folytonos valószínűségi változó. Ekkor minden $a < b$ valós szám esetén

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

(Bizonyítás: lásd előadás)

A bizonyítás során láttuk: folytonos X esetén minden $a \in \mathbb{R}$ -re

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(x) dx = 0.$$

Emiatt minden a, b -re

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$

Diszkrét esetben ez nincs így!!!

A sűrűségfüggvény szemléletes jelentése

Ahogy már utaltunk rá, ha X folytonos, akkor $x \in \mathbb{R}$ -re

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x}$$

feltéve, hogy F_X differenciálható x -ben, ami a legtöbb példában véges sok pont kivételével teljesül. (Ellenpélda: lásd IMSc házi.)

Vagyis a $f_X(x)$ azt adja meg, hogy x egy kis környezetébe milyen valószínűséggel esik X , osztva a kis környezet hosszával.

Intuíció: végezzük az X -nek megfelelő véletlen kísérletet sokszor egymás után függetlenül. Ekkor az, hogy rögzített kis $\Delta x > 0$ esetén egy adott x -re $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ -be milyen gyakorisággal (*sűrűséggel*) esnek a véletlen eredmények, kb. $f_X(x)$ -szel lesz arányos.

Ilyen értelemben a sűrűségfüggvény a súlyfüggvény megfelelő analógja a folytonos esetre vonatkozóan.

Intuíció pontosítása $\rightarrow$ lásd Matematikai statisztika MSc-s tárgy, empirikus sűrűségfüggvény/sűrűséghisztogram témaköre.

Egyenletes eloszlás

A legegyszerűbb folytonos eloszlás az **egyenletes** eloszlás, amelynek egy $[a, b]$ intervallumon konstans 0 a sűrűségfüggvénye.

Azt mondjuk, hogy egy X val. változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon (ahol $-\infty < a < b < \infty$), ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölés: $X \sim U(a; b)$. Miért pont $\frac{1}{b-a}$?

Egyenletes eloszlás

A legegyszerűbb folytonos eloszlás az **egyenletes** eloszlás, amelynek egy $[a, b]$ intervallumon konstans 0 a sűrűségfüggvénye.

Azt mondjuk, hogy egy X val. változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon (ahol $-\infty < a < b < \infty$), ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

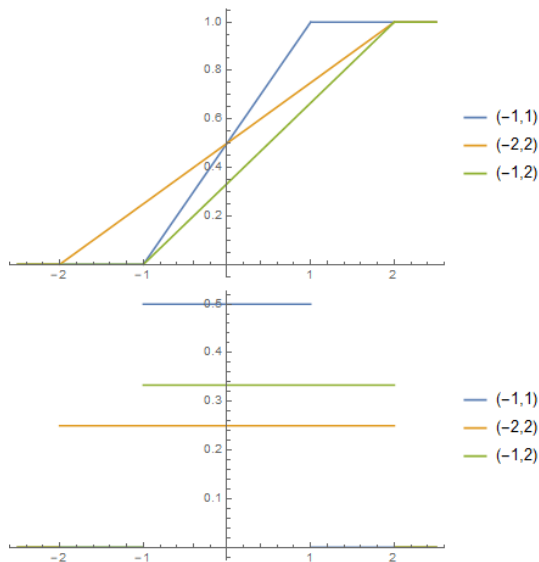
Jelölés: $X \sim U(a; b)$. Miért pont $\frac{1}{b-a}$? Azért, hogy az integrálja 1 legyen az egész számegyenesen (vagyis ebben az esetben az $[a, b]$ intervallumon, hiszen mindenhol máshol 0 a függvény).

A sűrűségfüggvény $-\infty$ -tól x -ig való integrálásával kapjuk az eloszlásfüggvényt, amely lineárisan nő 0-ról 1-re a -tól b -ig:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Mindenhol folytonos, a és b kivételével differenciálható függvény. 

Egyenletes eloszlás: eloszlás- és sűrűségfüggvény



Folytonos X esetén F_X mindig mindenütt folytonos, f_X nem feltétlenül.

Megjegyzés: függvények megadása a határokon folytonos esetben

- ▶ Sűrűségfüggvény: nyílt (vagyis $(-\infty, a)$, (a, b) , (b, ∞) , $(-\infty, \infty)$ alakú) intervallumon vagy ilyenek diszjunkt unióján legyen nem nulla, mert deriválni csak nyílt halmazon lehet.
- ▶ Eloszlásfüggvény: mivel folytonos, a határokat bármelyik szomszédos részbe besorolhatjuk, akár mind a kettőbe egyszerre (de legalább az egyikbe be kell sorolni).

Egyenletes eloszlás: kapcsolat a geometriai val. mezővel

Az (a, b) intervallumon $(-\infty < a < b < \infty)$ vett **egyenletes eloszlást** eddig “az (a, b) (vagy $[a, b]$) intervallumon taláломra választott X pont” eloszlásának neveztünk

→ geometriai valószínűségi mező, a valószínűség a „területtel” (itt intervallumhosszal) arányos.

Ez tehát azt jelenti, hogy ha $a \leq s < t \leq b$, $\mathbb{P}(s < X < t)$ az (s, t) intervallum hosszával arányos, vagyis

$$\mathbb{P}(s < X < t) = \text{const} \cdot (t - s), \text{ ahol } \text{const} = \frac{1}{b-a}.$$

A sűrűségfüggvény szemléletes jelentése szerint: ha $a < x < b$,

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{2\Delta x}{(b-a)2\Delta x} = \frac{1}{b-a}.$$

Mivel a sűrűségfüggvény **konstans**, az utolsó egyenlőség akkor is igaz, ha elhagyjuk a $\lim_{\Delta x \downarrow 0}$ -t (eggyel korábban is elhagyhatjuk).

Ehhez csak az kell, hogy Δx olyan kicsi legyen, hogy az $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ intervallum egésze (a, b) része legyen.

Általános folytonos val. változónál ugyanez nem igaz!!

Egyenletes eloszlás: kapcsolat a geometriai val. mezővel

Az (a, b) intervallumon $(-\infty < a < b < \infty)$ vett **egyenletes eloszlást** eddig “az (a, b) (vagy $[a, b]$) intervallumon taláломra választott X pont” eloszlásának neveztünk

→ geometriai valószínűségi mező, a valószínűség a „területtel” (itt intervallumhosszal) arányos.

Ez tehát azt jelenti, hogy ha $a \leq s < t \leq b$, $\mathbb{P}(s < X < t)$ az (s, t) intervallum hosszával arányos, vagyis

$$\mathbb{P}(s < X < t) = \text{const} \cdot (t - s), \text{ ahol } \text{const} = \frac{1}{b-a}.$$

A sűrűségfüggvény szemléletes jelentése szerint: ha $a < x < b$,

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x))}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{2\Delta x}{(b-a)2\Delta x} = \frac{1}{b-a}.$$

Mivel a sűrűségfüggvény konstans, az utolsó egyenlőség akkor is igaz, ha elhagyjuk a $\lim_{\Delta x \downarrow 0}$ -t (eggyel korábban is elhagyhatjuk).

Ehhez csak az kell, hogy Δx olyan kicsi legyen, hogy az $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ intervallum egésze (a, b) része legyen.

Általános folytonos val. változónál ugyanez nem igaz!!

Geometriai valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változók (össznépi feladatmegoldó fesztivál)

Ha $X \sim U(a; b)$, akkor X transzformáltjai (pl. X^2, e^X stb.) már jellemzően nem egyenletes eloszlásúak, de eloszlásfüggvényük a geometriai valószínűség képlete alapján meghatározható, annak deriválásával pedig a sűrűségfüggvényük is.

Egyszerű példa: 5. feladatsor, 11. és 12. feladat.

Hasonlóan járunk el kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőn definiált val. változó esetén is.

Kétdimenziós, de még viszonylag kellemesebb példa: 5. feladatsor, 13. feladat.

Összetettebb példa: 5. feladatsor, 14. és 15. feladat.

Kicsit más eloszlás- és sűrűségfüggvény-meghatározás: 5. feladatsor, 16. feladat.

Ezen feladatok egy részét később össznépi gyakorlatként megoldjuk majd előadáson.

Bertrand-paradoxon

A most következő diák részben Tóth Dávid németes valszám diasorából származnak.

Egy 1 sugarú körben válasszunk véletlenszerűen egy húrt. Mennyi a valószínűsége, hogy a húr legalább olyan hosszú, mint a körbe írható szabályos háromszög egy oldala?

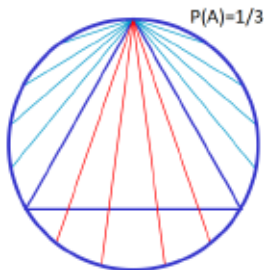
A következőkben megadunk három különböző „megoldást” (érvelést) három különböző eredménnyel, ezért nevezzük a problémát „paradoxonnak”.

Bertrand-paradoxon

1. megoldás: Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen és egymástól függetlenül egy P és egy Q pontot a körvonalról, és legyen a húr az őket összekötő szakasz.

Sorsoljuk ki először a P pontot, majd rajzoljunk a körbe egy olyan szabályos háromszöget, aminek csúcsa ez a P .

Világos, hogy pontosan akkor kapunk a háromszög oldalánál hosszabb húrt, ha Q a háromszög másik két csúcsa közé esik. Így a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$.

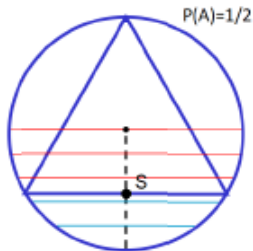


Bertrand-paradoxon

2. megoldás: Válasszuk ki egyenletesen véletlenszerűen egy sugarát a körnek, majd rajta egyenletesen véletlenszerűen (a sugár választástól függetlenül) egy P pontot. A húr legyen az, amelyik a sugárra merőleges, és a sugarat a P pontban metszi.

Sorsoljuk ki először a sugarat, majd rajzoljunk a körbe egy olyan szabályos háromszöget, aminek egyik oldala merőlegesen metszi a sugarat, jelölje a metszéspontot S .

Látható, hogy pontosan akkor kapunk a háromszög oldalánál hosszabb húrt, ha a P pont közelebb van a kör középpontjához, mint S . Mivel S felezi a sugarat, így a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$.

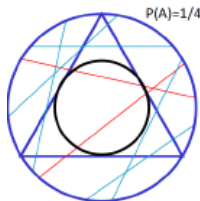


Bertrand-paradoxon

3. megoldás: Válasszunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy P pontot a körlapon. Legyen a húr az, aminek éppen P a felezőpontja. Ilyen húr mindig csak egy van (hacsak P nem a középpont, de mivel ez nulla valószínűségű lehetőség, így ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk).

Vegyünk egy szabályos háromszöget a körben, és nézzük ennek a beírható körét. A húr pontosan akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha P a kisebb körbe esik.

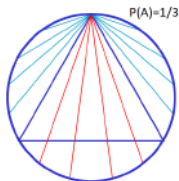
Az előző esetben láttuk, hogy ha a nagy kör sugara r , akkor a kis kör sugara $r/2$. A keresett valószínűség pedig a két kör területének aránya, azaz $\frac{(r/2)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4}$.



Bertrand-paradoxon

Melyik megoldás helyes? Mindegyik.

Különböző modellek, különböző (mindegyik esetben geometriai) valószínűségi mezők $\rightarrow$ különböző eredmények.

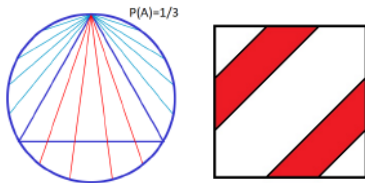


1. megoldás: két pontot választunk egymástól függetlenül, vagyis két szöget egyenletesen a $[0, 2\pi)$ intervallumon (a szögeket radiánban mérjük).

Bertrand-paradoxon

Melyik megoldás helyes? Mindegyik.

Különböző modellek, különböző (mindegyik esetben geometriai) valószínűségi mezők $\rightarrow$ különböző eredmények.



1. megoldás $\rightarrow$ Eseménytér: $\Omega = [0, 2\pi)^2 = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Ha α az elsőként választott szög, akkor a kedvező esetek halmaza $\{\alpha\} \times (\alpha + 2\pi/3, \alpha + 4\pi/3)$.

Ez azonban nem mindig esik bele teljesen az Ω négyzetbe, ezért $(\alpha + 2\pi/3, \alpha + 4\pi/3)$ -t „modulo 2π ” értjük, azaz az ide eső számok „ 2π -vel való osztási maradékát” vesszük (lásd ábra).

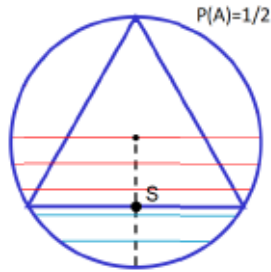
Így a kedvező terület $2\pi \cdot (2\pi/3) = 4\pi^2/3$ (két $4\pi/3$ befogójú derékszögű egyenlőszárú háromszög területe mínusz két $2\pi/3$

befogójúé), vagyis a keresett valószínűség $\frac{4\pi^2/3}{4\pi^2} = 1/3$.

Bertrand-paradoxon

A **2. megoldásnál** az eseménytér: $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, 1]$ (a sugarat a végpontjának egy rögzített másik sugárral alkotott szögével, a sugáron választott pontot a középponttól való távolságával paraméterezzük, és a kettőt egymástól függetlenül választjuk). Kedvező kimenetek halmaza: $[0, 2\pi) \times [0, 1/2]$.

Így a keresett esemény valószínűsége $1/2$.

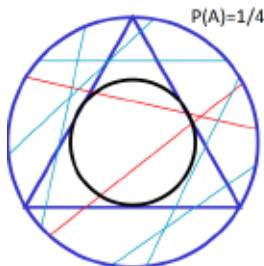


Bertrand-paradoxon

A **3. megoldásnál** az eseménytér: Ω az 1 sugarú, origó középpontú körlap.

A kedvező kimenetek halmaza az $1/2$ sugarú, ezzel koncentrikus kör.

Így a keresett esemény valószínűsége a két terület hányadosa, azaz $\frac{(1/2)^2\pi}{1^2\pi} = \frac{1}{4}$.



Néhány általános megjegyzés geometriai val. mezőkről

- ▶ Egy-egy pont választásának valószínűsége 0.
Hasonlóan: a síkban/térben egy egydimenziós szakasz vagy görbe választásának, illetve a térben egy kétdimenziós felület választásának valószínűsége is 0.
- ▶ Pl. az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású X esetén:
 $\mathbb{P}(X = x) = 0$, minden $x \in (a, b)$ -re. De $\{X = x\} \neq \emptyset$, hiszen
 $\bigcup_{x \in (a, b)} \{X = x\} = \{a < X < b\} = \Omega$.
0 valószínűségű, de nem lehetetlen események!
- ▶ A geometriai val. mező fogalma kiterjeszthető $\mathbb{R}^n$ bizonyos korlátos részhalmazaira is $\rightarrow$ egy adott „alacsonyabb dimenziós objektum” választásának valószínűsége 0.
- ▶ A hosszúság/terület/térfogat/ n -dimenziós térfogat fogalma nem terjeszthető ki értelmesen az eseménytér minden részhalmazára.
Így itt az $\mathcal{F}$ σ -algebra megválasztása fontos kérdés (de ezzel ebből a tárgyból nem foglalkozunk).
- ▶ Így nem lehet az eseménytér minden részhalmaza esemény, de a gyakorlatban fontos részhalmazok igen. (Pl. a síkban bármilyen sokszögbe, körbe/ellipszisbe stb. és ilyen halmazok megszámlálható metszetébe vagy uniójába esés esemény lesz.)

Példa: exponenciális eloszlás

(5.2.3. Definíció.) Egy Z valószínűségi változó **exponenciális eloszlású** $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

vagyis

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Jelölés: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Az $\text{Exp}(1)$ eloszlás neve **standard** exponenciális eloszlás.

Előfordulása: várakozási idők ($Z \geq 0$, 1 valószínűséggel), pl. egy villanykörte kiégéséig hátralévő idő.

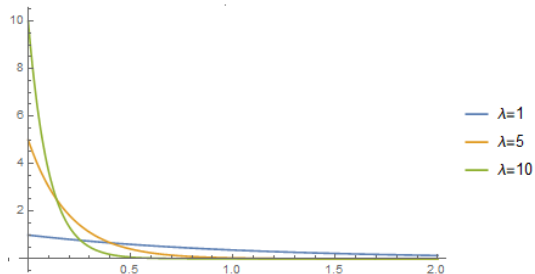
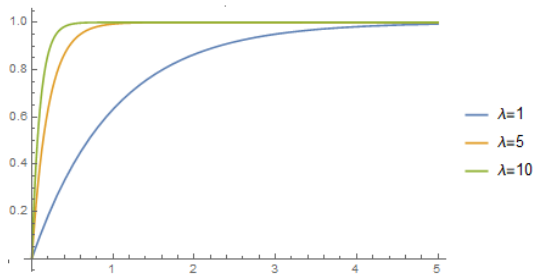
(Példa: össznépi gyakorlat, 6.14. feladat a), b))

Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amiről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$.

a) Mi X eloszlásának paramétere (λ)?

b) $\mathbb{P}(X < 2) = ?$

Exponenciális eloszlás: eloszlás- és sűrűségfüggvény



Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Emlékeztető: a geometriai eloszlás örökifjúsága: ha $X \sim \text{Geo}(p)$, akkor

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Figyeljük meg: ha s, t közül valamelyik nem egész szám, akkor (1) nem feltétlenül teljesül. Pl. legyen $t = 3/4$, $s = 1/2$, ekkor

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > 5/4 | X > 3/4) = \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - p,$$

de

$$\mathbb{P}(X > s) = \mathbb{P}(X > 1/2) = 1.$$

Viszont ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, akkor (1) igaz bármely $s, t \in [0, \infty)$ esetén.

(Bizonyítás: lásd előadás)

Modellezési kérdés: milyen várakozási idők esetén teljesül (1)?

Pl. a villanykörte esetén mérési eredmények szerint *nagyjából* igen.

Pl. egy ember elhalálozásáig hátralévő idő esetén nem!

A villanykörte nem nagyon öregszik, az ember igen.

Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Emlékeztető: a geometriai eloszlás örökifjúsága: ha $X \sim \text{Geo}(p)$, akkor

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Figyeljük meg: ha s, t közül valamelyik nem egész szám, akkor (1) nem feltétlenül teljesül. Pl. legyen $t = 3/4$, $s = 1/2$, ekkor

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > 5/4 | X > 3/4) = \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - p,$$

de

$$\mathbb{P}(X > s) = \mathbb{P}(X > 1/2) = 1.$$

Viszont ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, akkor (1) igaz bármely $s, t \in [0, \infty)$ esetén.

(Bizonyítás: lásd előadás)

Modellezési kérdés: milyen várakozási idők esetén teljesül (1)?

Pl. a villanykörte esetén mérési eredmények szerint *nagyjából* igen.

Pl. egy ember elhalálozásáig hátralévő idő esetén nem!

A villanykörte nem nagyon öregszik, az ember igen.

Örökifúság, exponenciális és geometriai eloszlás

Emlékeztető: (5.2.5. (1) Állítás.) Ha egy X nemkonstans valószínűségi változóra

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots\} \quad (2)$$

teljesül és $\text{Ran}(X) = \{1, 2, \dots\}$, akkor $X \sim \text{Geo}(p)$, ahol $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Most: (5.2.5. (2) Állítás.) Ha egy X nemkonstans valószínűségi változóra a

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \geq 0 \quad (3)$$

örökifjúsági feltétel teljesül és $\text{Ran}(X) = [0, \infty)$, akkor X eloszlása exponenciális.

Az 5.2.5. (2) állítás köznyelvi, majdnem ekvivalens megfogalmazása:

Ha X eloszlása folytonos és örökifjú, akkor X exponenciális eloszlású.

Zh-n és vizsgán, vagy gyakorlati alkalmazásokban (pl. tömegszolgálat) leginkább erre a megfogalmazásra van szükség.

Örökijfúság, exponenciális és geometriai eloszlás

Emlékeztető: (5.2.5. (1) Állítás.) Ha egy X nemkonstans valószínűségi változóra

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \in \{1, 2, \dots\} \quad (2)$$

teljesül és $\text{Ran}(X) = \{1, 2, \dots\}$, akkor $X \sim \text{Geo}(p)$, ahol $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Most: (5.2.5. (2) Állítás.) Ha egy X nemkonstans valószínűségi változóra a

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall s, t \geq 0 \quad (3)$$

örökijfúsági feltétel teljesül és $\text{Ran}(X) = [0, \infty)$, akkor X eloszlása exponenciális.

Bizonyítás: lásd előadás.

A bizonyítás során használjuk az alábbi lemmát, amit nem bizonyítottunk:

(5.2.6. Lemma.) Ha $g: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény, amire $g(t + s) = g(t) + g(s)$ teljesül tetszőleges $s, t \in [0, \infty)$ esetén, akkor $g(t) = -\lambda t$, ahol $\lambda = -g(1) \geq 0$.

Kapcsolat az exponenciális és a geometriai eloszlás között

Az örökifjúság miatt az exponenciális eloszlás a geometriai eloszlás folytonos analógja. A következő állítás alapján a geometriai eloszlás ki is fejezhető az exponenciálisból.

(5.2.7. Állítás.) Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $\lceil X \rceil$ geometriai eloszlású $1 - e^{-\lambda}$ paraméterrel. (Bizonyítás)

Figyeljük meg, hogy az exponenciális és a Poisson-eloszlás között szintén van kapcsolat: ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(Y = 0).$$

A két eloszlást az ún. Poisson-folyamat kapcsolja össze $\rightarrow$ lásd MSc-s tárgyak: Sztochasztika és Tömegkiszolgálás (1).

Intuíció: tegyük fel, hogy bizonyos ismétlődő „események” (pl. telefonhívások, földrengések stb.) független, $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású időközönként követik egymást. Ekkor egy t hosszúságú időintervallumba eső események száma $\text{Pois}(\lambda t)$ eloszlású lesz, továbbá diszjunkt intervallumokba eső események számai függetlenek lesznek.

Itt $\mathbb{P}(Y = 0)$ azt jelenti, hogy egy $t = 1$ hosszú időintervallumban nincs esemény, míg $\mathbb{P}(X \geq 1)$ azt, hogy a várakozási idő 1-nél több. Ezek egyenlőek.

Kapcsolat az exponenciális és a geometriai eloszlás között

Az örökifjúság miatt az exponenciális eloszlás a geometriai eloszlás folytonos analógja. A következő állítás alapján a geometriai eloszlás ki is fejezhető az exponenciálisból.

(5.2.7. Állítás.) Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $[X]$ geometriai eloszlású $1 - e^{-\lambda}$ paraméterrel. (Bizonyítás)

Figyeljük meg, hogy az exponenciális és a **Poisson**-eloszlás között szintén van kapcsolat: ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(Y = 0).$$

A két eloszlást az ún. **Poisson-folyamat** kapcsolja össze $\rightarrow$ lásd MSc-s tárgyak: Sztochasztika és Tömegkiszolgálás (1).

Intuíció: tegyük fel, hogy bizonyos ismétlődő „események” (pl. telefonhívások, földrengések stb.) független, $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású időközönként követik egymást. Ekkor egy t hosszúságú időintervallumba eső események száma $\text{Pois}(\lambda t)$ eloszlású lesz, továbbá diszjunkt intervallumokba eső események számai függetlenek lesznek.

Itt $\mathbb{P}(Y = 0)$ azt jelenti, hogy egy $t = 1$ hosszú időintervallumban nincs esemény, míg $\mathbb{P}(X \geq 1)$ azt, hogy a várakozási idő 1-nél több. Ezek egyenlőek.

Nem minden val. változó diszkrét vagy folytonos...

Példa: az X val. változót úgy kapjuk, hogy egy szabályos pénzérmét feldobunk, és ha fej az eredmény, akkor a kedvenc véletlenszám-generátorunkkal $(0, 1)$ -en választunk egyenletesen egy számot és ezt tekintjük X -nek, ha pedig írás, akkor feldobunk egy szabályos dobókockát és az eredményt tekintjük X -nek. Ekkor

- ▶ X nem folytonos, mert ha az lenne, akkor $\mathbb{P}(X = 6) = 0$ teljesülne, de $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (szorzási szabály).
- ▶ X nem is diszkrét, mert a $(0, 1)$ intervallumon minden értéket felvehet, tehát értékkészlete nem megszámlálható.

Feltéve, hogy fejet dobunk, X úgy viselkedik, mint egy folytonos val. változó, és feltéve, hogy írást, úgy, mint egy diszkrét.

Ha $x \in (0, 1)$ és Δx olyan kicsi, hogy $0 < x - \Delta x < x + \Delta x < 1$, akkor

$$\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x)) = \mathbb{P}(\text{fej})\mathbb{P}(X \in (x - \Delta x, x + \Delta x) | \text{fej}) = \Delta x.$$

Így a „sűrűségfüggvény” a $(0, 1)$ -en konstans $\frac{1}{2}$, azonban ez nem igazi sűrűségfüggvény, mert ha 0-tól 1-ig integráljuk, csak $\frac{1}{2}$ -et ($= \mathbb{P}(\text{fej})$) kapunk.

Várható érték folytonos esetben

Emlékeztető: ha X **nemnegatív** diszkrét valószínűségi változó, amelyre

$$\sum_{k \in \text{Ran}(X)} |k| \mathbb{P}(X = k) < \infty,$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \text{Ran}(X)} k \mathbb{P}(X = k).$$

Ennek analógja a folytonos esetben: ahelyett, hogy a súlyfüggvényt k -val szorozva összegeznénk, a sűrűségfüggvényt x -szel szorozva kiintegráljuk $\rightarrow$ ez is egy „valószínűséggel súlyozott átlag”.

(4.3.3. Állítás.) Legyen X folytonos valószínűségi változó, amelyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Várható érték folytonos esetben

(4.3.3. Állítás.) Legyen X folytonos valószínűségi változó, amelyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Az állítást – bizonyos mértékelméleti alapok hiányában – nem bizonyítjuk.

Megjegyzés: Ezen tárgy szempontjából a 4.3.3. Állításban szereplő képletet nyugodtan tekinthetjük a várható érték *definíciójának* is folytonos esetben.

Azonban van a várható értéknek olyan definíciója is, ami a diszkrét és a folytonos esetet is lefedi $\rightarrow$ 3.4.1. Definíció, lásd később.

Nevezetes eloszlások várható értéke

(Állítás.) Ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$ -ra, akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

(Bizonyítás: lásd előadás/jegyzet, parc. int.)

Vagyis minél nagyobb λ , annál kisebb a várható érték.

Intuíció: ha bizonyos események között a várakozási idők független $\text{Exp}(\lambda)$ -eloszlásúak, akkor egy 1 hosszú időintervallumba átlagosan λ db esemény fog esni $\rightarrow$ lásd Poisson-folyamat. Az exponenciális eloszlás λ paraméterét szokás az eloszlás **rátájának** is nevezni.

(Állítás.) Ha X egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon (ahol $-\infty < a < b < \infty$), akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

(Bizonyítás: lásd előadás/jegyzet)

Vagyis az $U(a; b)$ eloszlású val. változó „átlagosan” az intervallum középpontjában van. (Szimmetria!)

Nevezetes eloszlások várható értéke

(Állítás.) Ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$ -ra, akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

(Bizonyítás: lásd előadás/jegyzet, par. int.)

Vagyis minél nagyobb λ , annál kisebb a várható érték.

Intuíció: ha bizonyos események között a várakozási idők független $\text{Exp}(\lambda)$ -eloszlásúak, akkor egy 1 hosszú időintervallumba átlagosan λ db esemény fog esni $\rightarrow$ lásd Poisson-folyamat. Az exponenciális eloszlás λ paraméterét szokás az eloszlás **rátájának** is nevezni.

(Állítás.) Ha X egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon (ahol $-\infty < a < b < \infty$), akkor $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

(Bizonyítás: lásd előadás/jegyzet)

Vagyis az $U(a; b)$ eloszlású val. változó „átlagosan” az intervallum középpontjában van. (Szimmetria!)

Várható érték: pozitív rész, negatív rész

Kérdés: ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx = \infty$, lehet-e $\mathbb{E}(X)$ -et legalább $+\infty$ vagy $-\infty$ értékkel definiálni?

Erre a kérdésre ugyanazt válaszolhatjuk, mint diszkrét esetben:

- ▶ Ha $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \in [0, \infty]$ jóldefiniált.
- ▶ Ha $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1$: $\mathbb{E}(X) \in [-\infty, 0]$ jóldefiniált.
- ▶ Ha X pozitív és negatív értékeket is felvesz: ekkor, ahogy láttuk, $X^+ = \max(X, 0)$ és $X^- = \max(-X, 0)$ nemnegatív valószínűségi változók, továbbá

$$X = X^+ - X^- \text{ és } |X| = X^+ + X^-.$$

Ha $\mathbb{E}(X^+) < \infty$ vagy $\mathbb{E}(X^-) < \infty$, akkor legyen

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-),$$

ami vagy egy valós szám, vagy $+\infty$, vagy $-\infty$. Ha $\mathbb{E}(X^+) = \mathbb{E}(X^-) = \infty$, akkor a várható értéket nem értelmezzük. (Példa: Cauchy-eloszlás, lásd előadás.)

- ▶ Ismét látjuk: $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ pontosan akkor, ha $\mathbb{E}(X)$ létezik és véges.

A várható érték linearitása

A várható érték linearitása nemcsak diszkrét, hanem tetszőleges val. változók esetén igaz, amelyeknek létezik várható értéke:

(Állítás.) Legyenek X, Y valószínűségi változók, amelyekre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Ekkor $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.

Ugyanez igaz pl. nemnegatív val. változókra is, használva az $\infty + \infty = \infty + c = \infty$ konvenciót (ahol $c \in \mathbb{R}$):

(4.3.1. Állítás.) Legyenek X, Y nemnegatív valószínűségi változók. Ekkor $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Ezek az állítások akkor is igazak pl., ha X diszkrét és Y folytonos. Pl. ha X egy kockadobás eredménye és $Y \sim \text{Exp}(1)$, akkor $\mathbb{E}(X + Y) = 4,5$.

Transzformált várható értéke

Folytonos X esetén is fontos mennyiség például X szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Kérdés: Hogyan számoljuk ki $\mathbb{E}(X^2)$ -et?

1. lehetőség: alkalmazzuk az alábbi állítást $g(x) = x^2$ -re.

(4.3.5. Állítás részlete.) Legyen X folytonos valószínűségi változó és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot f_X(x) \, dx < \infty,$$

akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx.$$

Megjegyzés: Ha $g(x) \geq 0$ minden $x \in \text{Ran}(X)$ esetén, akkor $\mathbb{E}(g(X)) \in [0, \infty]$ mindig jóldefiniált. Pl. $\mathbb{E}(X^2)$ minden X -re jóldefiniált, legfeljebb végtelen.

Transzformált várható értéke

Folytonos X esetén is fontos mennyiség például X szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Kérdés: Hogyan számoljuk ki $\mathbb{E}(X^2)$ -et?

1. lehetőség: alkalmazzuk az alábbi állítást $g(x) = x^2$ -re.

(4.3.5. Állítás részlete.) Legyen X folytonos valószínűségi változó és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot f_X(x) \, dx < \infty,$$

akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx.$$

Megjegyzés: Ha $g(x) \geq 0$ minden $x \in \text{Ran}(X)$ esetén, akkor $\mathbb{E}(g(X)) \in [0, \infty]$ mindig jóldefiniált. Pl. $\mathbb{E}(X^2)$ minden X -re jóldefiniált, legfeljebb végtelen.

Transzformált eloszlása folytonos esetben

Kérdés: Hogyan számoljuk ki $\mathbb{E}(X^2)$ -et?

2. lehetőség: Meghatározzuk a $g(X)$ val. változó $f_{g(X)}$ sűrűségfüggvényét, majd a várható érték képlete szerint kiszámoljuk a várható értékét:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{g(X)}(x) dx.$$

Ha csak $\mathbb{E}(g(X))$ érdekel minket, akkor sokszor könnyebb az előző dián szereplő képletet használni.

Ha viszont kíváncsiak vagyunk a $g(X)$ val. változó eloszlására is, akkor mindenképpen meg kell határoznunk $f_{g(X)}$ -et. **Eljárás:**

1. Meghatározzuk $g(X)$ értékkészletét.
2. Definíció szerint kiszámoljuk az $F_{g(X)}$ eloszlásfüggvényt.
3. Ennek a deriváltja (...) az $f_{g(X)}$ sűrűségfüggvény.

Figyelem: $f_{g(X)}$ -et általában nem tudjuk közvetlenül meghatározni.

Egyenletes eloszlás transzformáltja (négyzete)

Példa: $Y = X^2$ eloszlása, ahol X egyenletes eloszlású $(0, 1)$ -en.

1. $\text{Ran}(Y) = (0, 1)$, mert $\{x^2 : x \in (0, 1)\} = (0, 1)$.

$$2. F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

(Számolás: lásd előadás)

$$3. \text{Így } f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } x \geq 1. \end{cases}$$

Vagyis a sűrűségfüggvény szemléletes jelentése szerint

$$\mathbb{P}(Y \in (3/4 - \Delta x, 3/4 + \Delta x)) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\Delta x$$

és

$$\mathbb{P}(Y \in (1/4 - \Delta x, 1/4 + \Delta x)) \approx 1 \cdot 2\Delta x,$$

ha Δx kicsi. Vegyük észre: Y sűrűségfüggvénye nem korlátos!

(További példa eloszlástrafóra: össznépi gyak., 6.18. feladat részei)

Szórásnégyzet tulajdonságai

Igaz a folytonos/általános esetben is: ha $c \in \mathbb{R}$ és $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, akkor $\mathbb{D}^2(cX) = c^2\mathbb{D}^2(X)$, $\mathbb{D}^2(X + c) = \mathbb{D}^2(X)$.

Emlékeztető: (6.4.2. Állítás) Ha X és Y független valószínűségi változók és $\mathbb{E}(X^2), \mathbb{E}(Y^2) < \infty$, akkor

$$\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y).$$

Ezt csak diszkrét esetben láttuk be (és ott is csak részben), de a folytonos esetben hasonló a bizonyítás.

A diszkrét bizonyítás kulcsa: ha X, Y függetlenek, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ugyanez igaz *bármilyen* független valószínűségi változók esetén.

- ▶ Azt már tudjuk, hogy mi a függetlenség általános valószínűségi változók esetén: X, Y függetlenek $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y < y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- ▶ Nem tanultuk még, hogy $\mathbb{E}(XY)$ -t hogyan lehet kiszámolni a folytonos esetben (és hogy egyáltalán mit nevezünk „folytonos esetnek” többdimenziós eloszlásoknál) $\rightarrow$ hamarosan.

Nevezetes folytonos eloszlások szórása

(Példa.) Ha X egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, akkor

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(Tehát $\mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

(Bizonyítás – $\mathbb{E}(X^2)$ kiszámolása: lásd előadás)

(Példa: össznépi gyakorlat, 6.15. feladat, $\mathbb{D}^2(X+c) = \mathbb{D}^2(X)$)

(10.1.1. Példa.) Ha $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ (ahol $\lambda > 0$), akkor $\mathbb{D}^2(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$ (tehát $\mathbb{D}(Z) = \frac{1}{\lambda}$).

(Bizonyítás: azt már tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, ezért elég belátni, hogy $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.)

Ennek kiszámítása $\mathbb{E}(Z)$ kiszámításához hasonló: $2 \times$ parc. int. ugyanazzal a szereposztással, illetve a második parc. int.

elkerülhető, ha felismerjük az $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlás sűrűségfüggvényét. Lásd még: 6.15. feladat.)

Nemnegatív valószínűségi változók várható értéke

Nemnegatív val. változó esetén létezik egy elegáns alternatív kiszámítási módja a várható értéknek, ami esetenként könnyebb, mint az általános képlet.

(Állítás.) Ha X **nemnegatív** valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt.$$

(Bizonyítás folytonos X esetén: nincs a jegyzetben, ezért itt)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \int_0^x 1 dt f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} f_X(x) dx dt = \int_0^{\infty} [F_X(x)]_{x=t}^{\infty} dt \\ &= \int_0^{\infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) - F_X(t)) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt. \end{aligned}$$

Az integrálfelcserélés azért lehetséges, mert az integrandus ≥ 0 (lásd Fubini-tétel). A többi lépés az eloszlás- és sűrűségfüggvény ismert tulajdonságaiból következik.

Nemnegatív valószínűségi változók várható értéke

Nemnegatív val. változó esetén létezik egy elegáns alternatív kiszámítási módja a várható értéknek, ami esetenként könnyebb, mint az általános képlet.

(Állítás.) Ha X **nemnegatív** valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt.$$

- ▶ Az állítás nincs a jegyzetben, de a tárgy anyagának része (sőt már a régi tárgyénak is része volt).
- ▶ A bizonyításban szereplő integrálfelcserélést gyakran *Fubini flip*-ként említi az angol nyelvű irodalom.
- ▶ Diszkrét esetben is igaz az állítás (példa: gyakorlat, 6.6. feladat). Bizonyítás: integrálok helyett szummákkal.
- ▶ A geometriai eloszlás várható értékének a jegyzetben lévő („szummafelcserélős”) kiszámításánál már használtuk ezt a trükköt.
- ▶ (Példa: exponenciális eloszlás)

Folytonos valószínűségi változók szimulációja

Az eloszlástranszformációk egy informatikai alkalmazása:

Tegyük fel, hogy van egy véletlenszám-generátorunk, amely képes közelítőleg független, közelítőleg $U(0; 1)$ eloszlású (pszeudo)véletlen számokat generálni.

Az nem ezen tárgy anyaga, hogy a pszeudovéletlen számok generálása hogyan működik. Tekinthetjük black boxnak.

Kérdés: Hogyan szimuláljunk ennek segítségével (kb.) független, (kb.) egy másik, megadott folytonos eloszlást követő val. változókat? Pl. $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlásúakat?

Válasz: Az $U(0; 1)$ eloszlású val. változókat helyettesítsük be a keresett eloszlás eloszlásfüggvényének inverzébe.

Ennek a jóságát a következőkben két lépésben igazoljuk.

Folytonos valószínűségi változók szimulációja

Az eloszlástranszformációk egy informatikai alkalmazása:

Tegyük fel, hogy van egy véletlenszám-generátorunk, amely képes közelítőleg független, közelítőleg $U(0; 1)$ eloszlású (pszeudo)véletlen számokat generálni.

Az nem ezen tárgy anyaga, hogy a pszeudovéletlen számok generálása hogyan működik. Tekinthetjük black boxnak.

Kérdés: Hogyan szimuláljunk ennek segítségével (kb.) független, (kb.) egy másik, megadott folytonos eloszlást követő val. változókat? Pl. $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlásúakat?

Válasz: Az $U(0; 1)$ eloszlású val. változókat helyettesítsük be a keresett eloszlás eloszlásfüggvényének inverzébe.

Ennek a jóságát a következőkben két lépésben igazoljuk.

Folytonos valószínűségi változók szimulációja

(Állítás.) Ha X folytonos val. változó, akkor az $F_X(X)$ val. változó $U(0; 1)$ eloszlású.

(Bizonyítás abban az esetben, ha az f_X sűrűségfüggvény egy I nyílt $((-\infty, \infty), (-\infty, b), (a, \infty)$ vagy (a, b) alakú) intervallumon mindenhol pozitív, azon kívül pedig $0 \rightarrow$ lásd előadás.

Ekkor F_X szigorúan monoton nő az I intervallumon, „ I bal végpontjában” határértéke 0 , „jobb végpontjában” határértéke pedig 1 . Így az $F_X^{-1}: (0, 1) \rightarrow I, F_X(x) \mapsto x$ inverzfüggvény jóldefiniált, szigorúan monoton növekvő és I -n minden értéket felvesz.)

(Következmény.) Ha X folytonos val. változó és $U \sim U(0; 1)$, akkor $F_X^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F_X .

(Bizonyítás az előbb tárgyalt esetben)

($F_X^{-1}(U)$ eloszlásfv.-e $F_X \Leftrightarrow F_X^{-1}(U)$ és X eloszlása azonos.)

Megjegyzés: Az Állítás és a Következmény igaz tetszőleges folytonos val. változóra is, de óvatosabbnak kell lenni annak meghatározásánál, hogy az F_X és az F_X^{-1} függvények milyen értelmezési tartományon szig. mon. növekvők.

Folytonos valószínűségi változók szimulációja: példa

Ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, akkor $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

X sűrűségfüggvénye az $I = (0, \infty)$ nyílt intervallumon pozitív, azon kívül 0.

$\lim_{x \downarrow 0} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \uparrow \infty} F_X(x) = 1$, F_X szigorúan monoton nő $(0, \infty)$ -en.

Ekkor $x > 0$ és $u \in (0, 1)$ esetén

$$\begin{aligned} x = F_X^{-1}(u) &\Leftrightarrow F_X(x) = u &\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \\ &\Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1 - u) &\Leftrightarrow x = \frac{-\ln(1 - u)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Tehát ha $U \sim U(0; 1)$ egy számítógéppel nyert véletlen szám, akkor $\frac{-\ln(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(Példa Excelben szimulált exponenciális eloszlású véletlen számokra: lásd előadás)

Diszkrét valószínűségi változók szimulációja

Diszkrét X val. változó szimulációja esetén az előbbi eljárás nem használható, mert F_X nem invertálható (hiszen szakaszonként konstans, a szakaszok között pedig ugrik).

Kérdés: Hogyan szimuláljuk X -et egy $U \sim U(0; 1)$ val. változó segítségével?

Válasz: Ha $\text{Ran}(X) = \{k_1, k_2, \dots\}$ (k_i páronként különbözőek), osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot $I_1, I_2, \dots$ diszjunkt intervallumok uniójára úgy, hogy I_i hossza megegyezzen $\mathbb{P}(X = k_i)$ -vel.

Ezután szimuláljuk X -et úgy, hogy ha $U \in I_i$, akkor az $X = k_i$ értéket adjuk vissza.

Pl. dobókocka: $U \in (0, 1/6] \Rightarrow X = 1$, $U \in (1/6, 2/6] \Rightarrow X = 2$, $\dots$, $U \in (5/6, 1) \Rightarrow X = 6$.

Ez tökéletes szimuláció (legalábbis annyira, amennyire U tökéletesen $U(0; 1)$ eloszlású).

Ha X értékkészlete végtelen (pl. geometriai, Poisson- vagy Zipf-eloszlás), csak véges sok lehetséges értéket tudunk így szimulálni.

Diszkrét valószínűségi változók szimulációja

Diszkrét X val. változó szimulációja esetén az előbbi eljárás nem használható, mert F_X nem invertálható (hiszen szakaszonként konstans, a szakaszok között pedig ugrik).

Kérdés: Hogyan szimuláljuk X -et egy $U \sim U(0; 1)$ val. változó segítségével?

Válasz: Ha $\text{Ran}(X) = \{k_1, k_2, \dots\}$ (k_i páronként különbözőek), osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot $I_1, I_2, \dots$ diszjunkt intervallumok uniójára úgy, hogy I_i hossza megegyezzen $\mathbb{P}(X = k_i)$ -vel.

Ezután szimuláljuk X -et úgy, hogy ha $U \in I_i$, akkor az $X = k_i$ értéket adjuk vissza.

Pl. dobókocka: $U \in (0, 1/6] \Rightarrow X = 1$, $U \in (1/6, 2/6] \Rightarrow X = 2$, $\dots$, $U \in (5/6, 1) \Rightarrow X = 6$.

Ez tökéletes szimuláció (legalábbis annyira, amennyire U tökéletesen $U(0; 1)$ eloszlású).

Ha X értékkészlete végtelen (pl. geometriai, Poisson- vagy Zipf-eloszlás), csak véges sok lehetséges értéket tudunk így szimulálni.

Eddig tart a zh anyaga.

- ▶ (ide fogom írni, ha valami kimaradt az eddigiekből: Karger, Bertrand, Randomized Quicksort)
- ▶ A kiegészítő anyagként megjelölt részek sem kellenek (a vizsgához sem).
- ▶ A gyakorlat anyagából a 6. feladatsor az utolsó, ami benne lesz a zh-ban (a 6. feladatsorról még az is, ami esetleg csak a 7. héten hangzik el gyakorlaton).
- ▶ „Elméleti feladat” (definíció, tétel kimondása) csak a vizsgán lesz, de természetesen a zh-feladatokban is szükség van az előadáson elhangzott definíciókra, állításokra. Ezeket meg kell nevezni és a szükséges tulajdonságokra is hivatkozni kell.
Pl. „Az A, B és C események teljes eseményrendszert alkotnak, mert páronként kizáróak és uniójuk Ω (+ ennek indoklása), ezért a teljes valószínűség tétele szerint: ... ”
Természetesen lehet rövidebben is fogalmazni, de akkor is kell a teljes eseményrendszer, annak jelentése és a TVT.
- ▶ Számológépet lehet hozni (és érdemes is). Nevezetes eloszlás táblázatot mi adunk, sajátot használni nem lehet.

„A” nevezetes eloszlás

Tekintsük az alábbi véletlen mennyiségeket:

emberek lábmérete, születési súlya, vérnyomása, magassága (nők/férfiak külön), napi átlaghőmérséklet (az év adott napján), páratartalom, mérési hiba egy kísérletben, zaj.

Sok tényező apró, független tényező folytonos eredménye.

Elnevezések: normális eloszlás, Gauss-eloszlás, haranggörbe (a sűrűségfüggvénye).

Leggyakoribb és legnagyobb jelentőségű eloszlás a valószínűségelméletben és a statisztikában.

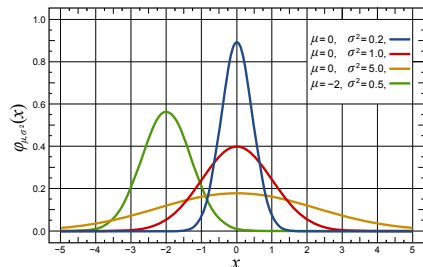
Normális eloszlás

(8.1.1. Definíció.) Egy Y folytonos valószínűségi változó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma^2 > 0$ paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. $N(0; 1)$ neve standard normális.

(Megjegyzés: σ^2 négyzetgyökét σ -val jelöljük, de az eloszlás paramétere σ^2 , nem σ .)



A sűrűségfüggvény μ -re szimmetrikus, és minél nagyobb σ , annál szétterültebb.

(Miért nem modellezi jól egy ilyen sűrűségfüggvény a testmagasságot, ha a nőket és a férfiakat együtt vizsgáljuk?)

Standard normális eloszlás: sűrűségfüggvény

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ez nemnegatív függvény. A következő állításból következik, hogy valóban sűrűségfüggvény, vagyis $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x) dx = 1$:

(8.1.2. Állítás.) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$

(Bizonyítás: polárkoordinátákkal)

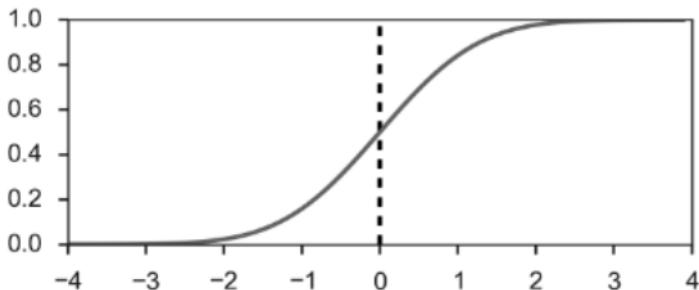
φ tulajdonságai: páros függvény, határértéke $\pm\infty$ -ben 0, mindenhol pozitív, maximuma 0-ban

Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ez elemi függvényekkel nem kifejezhető.

Ehelyett közelítéseket használunk.



Φ tulajdonságai: eloszlásfüggvény tulajdonságai igazak rá,
szigorúan monoton nő, $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

Standard normális eloszlás: táblázat

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

x	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985

$$\Phi(0,21) = 0,5832$$

$$\Phi(0,315) = 0,6236$$

$$\Phi(-0,11) = 1 - 0,5438 = 0,4562$$

Standard normális eloszlás: táblázat

Gyakorlaton a korábbi években a következő eljárás alakult ki a táblázat használatához:

- Ha kettőnél több tizedesjegyre tudjuk x -et és $\Phi(x)$ a kérdés, akkor kerekítsünk a legközelebbi két tizedesjegyes x -re; és arra számoljunk $\Phi(x)$ -et, illetve ha pont félúton van az x , akkor átlagoljuk a szomszédos két tizedesjegyre kerekített számok Φ értékét.
- Ha visszafelé kell kikeresniük egy értéket a normális eloszlásos táblázatból, azaz $\Phi(x) = y$, és y -t tudjuk, de az érték két táblázatban szereplő szám közé esik, azaz $\Phi(x_1) < y < \Phi(x_2)$ ahol x_1, x_2 szomszédosak a táblázatban, akkor a közelebbi x -et vegyük inverz értéknek, illetve ha pont félúton van az y , akkor pedig a kisebbik x -et.

Nem-standard normális

A nem-standard normális eloszlásra megadott függvények is sűrűségfüggvények.

Ugyanis a nem-standard normális eloszlás lineáris transzformációval nyerhető a standardból:

Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, X folytonos valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye minden pontban differenciálható, és legyen $Y = \sigma X + \mu$. Ekkor

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

(Bizonyítás: standard eloszlástra fő-feladat, lásd előadás.

Minden folytonos val. változóra igaz a zöld feltétel nélkül is, a közvetett függvény deriválása helyett integrálhelyettesítéssel.

Lásd 8.2.1. Lemma, bizonyítás a jegyzetben.)

Ha $X \sim N(0; 1)$, akkor $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu; \sigma^2)$, mert

$$\frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Standardizálás

Visszafelé: legyen $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$ és legyen $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$. Ez standard normális eloszlású, ugyanis a korábbiak szerint

$$f_X(x) = \sigma f_Y(\sigma x + \mu) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma x + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ezzel beláttuk:

(8.2.2. Következmény.) Legyen $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Egy Y valószínűségi változó pontosan akkor $N(\mu; \sigma^2)$ eloszlású, ha létezik $X \sim N(0; 1)$, amire $Y = \sigma X + \mu$, azaz $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$.

Normális eloszlás várható értéke, szórásnégyzete

(8.2.3. Állítás.) Legyen $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$. Ekkor $\mathbb{E}(Y) = \mu$ és $\mathbb{D}^2(Y) = \sigma^2$.

A bizonyításhoz először megmutatjuk, hogy elég a standard normális eloszlásra ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) belátni az állítást.

Ugyanis tegyük fel, hogy ezt beláttuk, és legyen $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$. Ekkor van olyan $X \sim N(0; 1)$, amelyre $Y = \sigma X + \mu$, tehát

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \mathbb{E}(X) + \mu = \mu$$

és

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \mathbb{D}^2(X) = \sigma^2.$$

(Bizonyítás $X \sim N(0; 1)$ esetén:

- ▶ $\mathbb{E}(X) = 0$ (szimmetria),
- ▶ $\mathbb{E}(X^2) = 1$ (parc. int.),

lásd előadás/jegyzet)

Standardizálás

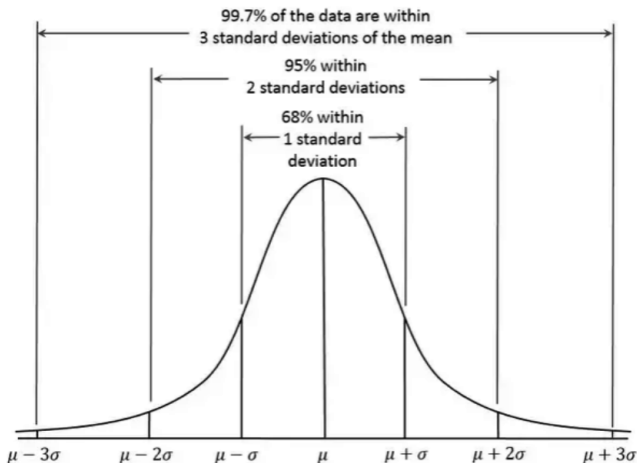
Normális eloszlás standardizálása: ha $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$, akkor

$$\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \sim N(0; 1).$$

Megjegyzés: Más eloszlású val. változót is standardizálhatunk (levonva a várható értékét, és leosztva a szórásával), feltéve, hogy a 2. momentuma véges.

Ez a standardizált persze tipikusan nem lesz standard normális eloszlású, de várható értéke 0 lesz, szórása 1.

Normális eloszlás szórása szemléletesen



- ▶ Az esetek kb. 68%-át lefedi a $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ intervallum,
- ▶ f_Y a $\mu \pm \sigma$ pontoknál vált konvexitást.

Normális eloszlás

Példa: Egy zajos csatornán egy ± 1 értékű jelet próbálunk átjuttatni. A zaj miatt a megkapott jel értéke nem feltétlenül ± 1 , hanem a jel értéke plusz egy $N(0; \sigma^2)$ eloszlású véletlen szám. Határozzuk meg σ -t, ha tudjuk, hogy annak az esélye, hogy egy “+1” jel esetén negatív érték jut át a csatornán, 0,0226.

Zaj: $Y \sim N(0; \sigma^2)$.

$$\mathbb{P}(1 + Y < 0) = \mathbb{P}(Y < -1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\sigma} < \frac{-1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sigma}\right) = 0,0226,$$

tehát $\sigma = \frac{1}{2,00}$.

Normális eloszlás

Példa: A minta hőmérséklete ($^{\circ}\text{C}$) $Y \sim N(-2; 1,69)$.

Mi a valószínűsége, hogy a minta hőmérséklete nagyobb, mint 0°C ?

Standardizált: $X = \frac{Y+2}{\sqrt{1.69}} \sim N(0; 1)$.

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{Y+2}{1.3} > \frac{2}{1.3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{1.3}\right).$$

$$\mathbb{P}(Y > 0) \approx 0,0620 \approx 6\%$$

Példa: normális eloszlások exponenciális momentumai

A normális eloszlás esetén sem mindig mindent a táblázatból olvasunk ki, hanem esetenként közvetlenül a sűrűségfüggvénnyel dolgozunk.

(Példa: 7.5. feladat, lásd gyak.)

Konvolúció diszkrét esetben

(Kiegészítő anyag: Mészáros Szabolcs jegyzetében szerepel, de az új TAD-ban már nem)

Ha X, Y független valószínűségi változók, mi $X + Y$ eloszlása?
(7.3.3. Állítás.) Legyenek X és Y független, **diszkrét** valószínűségi változók, amik értékei nemnegatív egész számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i)$$

minden $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ esetén.

(Bizonyítás) Ha X és Y független val. változók, akkor $X + Y$ eloszlását X és Y **konvolúciójának** hívjuk.

(Általános diszkrét X, Y esetén a képlet hasonló)

(7.3.4. Példa, biz. lásd előadás.) Legyenek X és Y független valószínűségi változók, amire $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Pois}(\mu)$. Ekkor $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$, azaz bármely $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ -ra

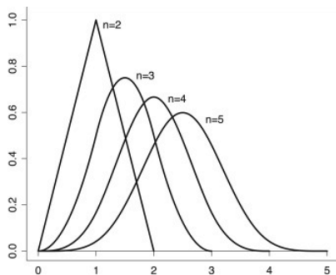
$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)}.$$

Kitérő: konvolúció

Ha X és Y független val. változók, akkor $X + Y$ eloszlását X és Y **konvolúciójának** hívjuk. Folytonos eset: $X + Y$ sűrűségfüggvénye

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)f_Y(x-z)dz, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ A binomiális eloszlás független indikátorok összege.
- ▶ $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \text{Pois}(\mu) \Rightarrow X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$.
- ▶ $\text{Geo}(p)$ eloszlásúak összege “negatív binomiális”.
- ▶ Egyenletes eloszlások összege: Irwin-Hall eloszlás (lásd ábra).
- ▶ Exponenciálisok összege “gamma-eloszlás”.
- ▶ Később fontos lesz: ha $X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ és $Y \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$, akkor $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.



de Moivre–Laplace-tétel

Kérdés: Miért jön elő a normális eloszlás alkalmazásokban, mérési eredményeknél?

A következő tétel szerint a binomiális eloszlás standardizáltja rögzített p és nagy n esetén közelíthető a normális eloszlással:

(8.3.1. Tétel: de Moivre–Laplace-tétel.) Legyen $p \in (0, 1)$ és $S_n \sim \text{Bin}(n; p)$. Ekkor minden $a < b$ valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b\right) = \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ahogy láttuk: $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Megjegyzés 1: A konvergencia sebességéről is lehet tudni konkrétumot.

Megjegyzés 2: Ez a tétel speciális esete a hamarosan következő **centrális határeloszlás-tételnek** (CHT).

de Moivre–Laplace-tétel

(8.3.1. Tétel: de Moivre–Laplace-tétel.) Legyen $p \in (0, 1)$ és $S_n \sim \text{Bin}(n; p)$. Ekkor minden $a < b$ valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b\right) = \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Más alakú intervallumokra hasonlóan igaz a tétel, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b\right) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx = \Phi(b).$$

de Moivre–Laplace-tétel

(8.3.1. Tétel: de Moivre–Laplace-tétel.) Legyen $p \in (0, 1)$ és $S_n \sim \text{Bin}(n; p)$. Ekkor minden $a < b$ valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b\right) = \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Poisson-eloszlásnál láttuk, hogy a binomiális határeloszlása a Poisson.

Most: binomiális határeloszlása a normális.

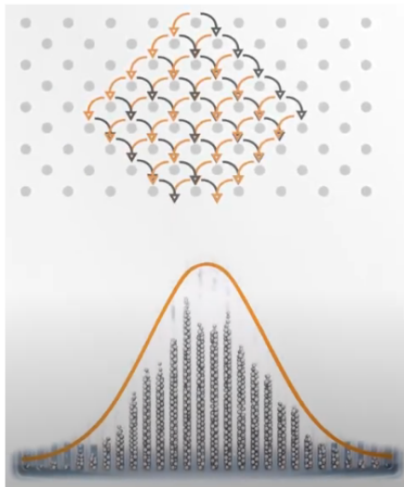
- ▶ Ott nem vontunk le (n -től függő) várható értéket, itt igen.
- ▶ Ott nem osztottunk le (n -től függő) szórással, itt igen.
- ▶ Ott $p_n \rightarrow 0$ és $np_n \rightarrow \lambda$ (pl. $p_n = \lambda/n$) volt feltétel, itt p konstans.

Tehát: n a Poisson-approximációnál is nagy, de ott $p = p_n$ nullához tart, a normális approximációnál nem.

Galton-deszka

Egy golyó vég-pozíciójának eloszlása: $\text{Bin}(n; 1/2)$ (a bal széléről számolva).

A binomiális eloszlás közelíti a normális eloszlás sűrűségfüggvényét.



Példa: de Moivre–Laplace-tétel

(8.3.2. Példa.) A matematikusok 31,4% százaléka szandált hord. Száz találomra választott matematikust nézve, közelítőleg mi az esélye, hogy kevesebb, mint 25 pár szandált találunk rajtuk?

Szandálpárok száma: $S_n \sim \text{Bin}(n; p)$, $n = 100$, $p = 0.314$.

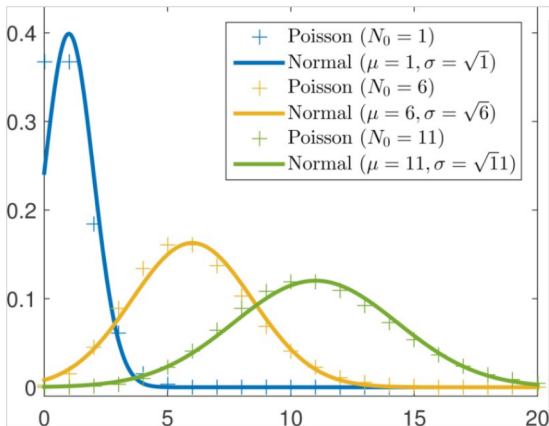
$$\mathbb{E}(S_n) = 31,4, \mathbb{D}(S_n) = \sqrt{100 \cdot 31,4 \cdot 68,6} \approx 4,6412.$$

$\frac{S_n - 31,4}{4,6412}$ közelítőleg $N(0; 1)$ eloszlású.

$$\mathbb{P}(X < 25) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 31,4}{4,6412} < \frac{25 - 31,4}{4,6412}\right) \approx \Phi(-1,3790) = 1 - \Phi(1,3790) \approx 0,0839 \approx 8\%.$$

Poisson vs. normális

Nemcsak a binomiális, hanem pl. a Poisson-eloszlás standardizáltja is közelíti a normális eloszlást, ha a Poisson-kísérletet sokszor ismételjük.



Mintaátlag viselkedése

Általában: legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, **azonos eloszlású** val. változók, amelyekre $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$.

(Azonos eloszlásúak = mindnek ugyanaz az eloszlásfüggvénye.)

Rövidítés: fae.=független és azonos eloszlású.

Angolul i.i.d.=independent and identically distributed.

Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Ekkor:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{\text{E lineáris}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \stackrel{\text{a.e.}}{=} n\mathbb{E}(X_1).$$

$$\mathbb{D}^2(S_n) = \mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{\text{fgtl.}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2(X_i) \stackrel{\text{a.e.}}{=} n\mathbb{D}^2(X_1).$$

Tekintsük az $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ **mintaátlagot**. Látjuk: $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)$,

$$\mathbb{D}(\overline{X}_n) = \mathbb{D}(S_n/n) = \frac{1}{n}\mathbb{D}(S_n) = \frac{\mathbb{D}(X_1)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Intuíció (pontatlan!): nagy n -re

- ▶ S_n/n közel van konstans $\mathbb{E}(X_1)$ -hez $\rightarrow$ **nagy számok törvénye**,
- ▶ az $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}}$ standardizált kb. $N(0; 1)$ eloszlású $\rightarrow$ **centrális határeloszlás-tétel**.

A mostani félév időbeosztásának sajátosságai miatt most csak az utóbbit tárgyaljuk. Az előbbire a 10-11. hét környékén visszatérünk.

Mintaátlag viselkedése

Általában: legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, **azonos eloszlású** val. változók, amelyekre $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$.

Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Ekkor:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{\text{E lineáris}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \stackrel{\text{a.e.}}{=} n\mathbb{E}(X_1).$$

$$\mathbb{D}^2(S_n) = \mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{\text{fgtl.}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2(X_i) \stackrel{\text{a.e.}}{=} n\mathbb{D}^2(X_1).$$

Tekintsük az $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ **mintaátlagot**. Látjuk: $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)$,
 $\mathbb{D}(\overline{X}_n) = \mathbb{D}(S_n/n) = \frac{1}{n}\mathbb{D}(S_n) = \frac{\mathbb{D}(X_1)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

Intuíció (pontatlan!): nagy n -re

- ▶ S_n/n közel van konstans $\mathbb{E}(X_1)$ -hez $\rightarrow$ **nagy számok törvénye**,
- ▶ az $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}}$ standardizált kb. $N(0; 1)$ eloszlású $\rightarrow$ **centrális határeloszlás-tétel**.

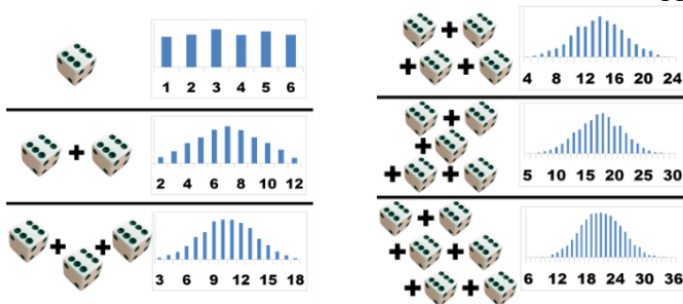
A mostani félév időbeosztásának sajátosságai miatt most csak az utóbbit tárgyaljuk. Az előbbire a 10-11. hét környékén visszatérünk.

Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

(9.3.3. Következmény, CHT.) Legyen $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. változók egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$, vagyis a szórásnégyzetük véges. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a),$$

ha $n \rightarrow \infty$, ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.



Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

(9.3.3. Következmény, CHT.) Legyen $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. változók egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$, vagyis a szórásnégyzetük véges. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a),$$

ha $n \rightarrow \infty$, ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Más intervallumokra hasonlóan igaz a CHT, például ha $a < b$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}} \geq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \Phi(a),$$

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}} < b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(b) - \Phi(a) \text{ stb.}$$

Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

(9.3.3. Következmény, CHT.) Legyen $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. változók egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$, vagyis a szórásnégyzetük véges. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}\mathbb{D}(X_1)} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a),$$

ha $n \rightarrow \infty$, ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Vegyük észre, hogy mivel $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ -re $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)$ és $\mathbb{D}(\overline{X}_n) = \mathbb{D}(X_1)/\sqrt{n}$, ezért fenti a standardizált az átlaggal is kifejezhető, mégpedig így:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}\mathbb{D}(X_1)} = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\mathbb{D}(\overline{X}_n)}.$$

CHT és de Moivre–Laplace tétel kapcsolata

Általános CHT: ha $X_1, \dots, X_n$ fae. és $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a). \quad (4)$$

de Moivre–Laplace-tétel: ha $S_n \sim \text{Bin}(n; p)$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a).$$

Vagyis:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a). \quad (5)$$

A CHT-ból következik a de Moivre–Laplace-tétel: ha $X_1, \dots, X_n$ független, p valószínűségű események indikátorai, akkor

$S_n := X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n; p)$.

Ekkor $\mathbb{E}(X_1) = p$, $\mathbb{D}(X_1) = \sqrt{p(1-p)}$. Tehát (4) ugyanaz, mint (5).

Nem binomiális eloszlású $X_1 + \dots + X_n$ esetén viszont a de Moivre–Laplace-tétel nem alkalmazható!!

Példa: CHT

Egy adott szem cseresznyében lévő kukacok száma

Poisson-eloszlású $\lambda = 0,1$ paraméterrel, és bármennyi különböző cseresznyében lévő kukacok számai együttesen függetlenek.

1. Mi a valószínűsége, hogy egy adott szem cseresznyében van legalább egy kukac? (Ezt már a zh-n is kérdezhettük volna.)
2. Veszünk 100 szem cseresznyét, jelölje X az ezekben lévő kukacok számának összegét. Mennyi X várható értéke és szórása?
3. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 100 szem cseresznyében összesen legalább 13 kukacot találunk. *A valószínűség pontos értéket nem kell meghatározni, arra nem jár pont.*
(Vizsgakurzus vizsgája, 3. feladat, 2025.06.12.)

Megjegyzés: Bár a feladatban szerepel Poisson-eloszlás, ez **nem** Poisson-approximációs, hanem CHT-s feladat.

Poisson-approximációja a binomiális eloszlásnak van (nagy n és kis p esetén), itt pedig nincs szó binomiális eloszlásról.

Példa: CHT

Egy adott szem cseresznyében lévő kukacok száma Poisson-eloszlású $\lambda = 0,1$ paraméterrel, és bármennyi különböző cseresznyében lévő kukacok számai együttesen függetlenek.

1. Mi a valószínűsége, hogy egy adott szem cseresznyében van legalább egy kukac? (Ezt már a zh-n is kérdezhettük volna.)
2. Veszünk 100 szem cseresznyét, jelölje X az ezekben lévő kukacok számának összegét. Mennyi X várható értéke és szórása?
3. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy a 100 szem cseresznyében összesen legalább 13 kukacot találunk. *A valószínűség pontos értéket nem kell meghatározni, arra nem jár pont.*
(Vizsgakurzus vizsgálja, 3. feladat, 2025.06.12.)

Megjegyzés: Bár a feladatban szerepel Poisson-eloszlás, ez **nem** Poisson-approximációs, hanem CHT-s feladat.

Poisson-approximációja a binomiális eloszlásnak van (nagy n és kis p esetén), itt pedig nincs szó binomiális eloszlásról.

Megjegyzés: eloszlásbeli konvergencia és CHT

Legyen Z egy standard normális eloszlású v.v. és

$$Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{D}(X_1)}}.$$

Ezekkel kifejezve a CHT azt mondja ki, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n < a) = \mathbb{P}(Z < a).$$

Eloszlásfüggvényekkel kifejezve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(a) = F_Z(a). \quad (6)$$

Ha **tetszőleges** Z_n , $n \in \mathbb{N}$ és Z val. változókra (6) minden olyan $a \in \mathbb{R}$ -re teljesül, **ahol Z folytonos**, akkor azt mondjuk, hogy Z_n **eloszlásban konvergál** Z -hez. (Itt $F_Z = \Phi$ minden pontban folyt.) Tehát a CHT eloszlásbeli konvergenciát állít.

Mészáros Szabolcs jegyzetében:

- ▶ eloszlásbeli konvergencia definíciója $\rightarrow$ 9.3.1. Definíció
- ▶ CHT kimondása eloszlásbeli konvergenciával $\rightarrow$ 9.3.2. Tétel.

Idén az írásbeli vizsgához elég a CHT intervallumos változatát tudni.

CHT bizonyításvázlata $\rightarrow$ lásd jegyzet.