

Valószínűesszámitás és statisztika

Tóbiás András
BME VIK SzIT

2025/26. őszi félév

Adminisztratív és technikai tudnivalók

Elérhetőségeim

- ▶ Tanszék: SzIT (tanszéki adminisztráció: a BSz-hez és Algelhez hasonlóan)
- ▶ Szoba: IE.2.17.2
- ▶ Email: tobiasandrasj_KUKAC_gmail.com
- ▶ Honlap: cs.bme.hu/_HULLÁMVONAL_tobias
- ▶ Fogadóóra: szükség szerint → egyeztessünk emailben időpontot

A tárgy adatai

- ▶ A tárgy neve: Valószínűségszámítás és statisztika
- ▶ A mérnökinformatikus BSc hallgatók kötelező tárgya (2023/24 óta)
- ▶ Kódja: VISZAB04, 6 kredites, vizsgás tárgy
- ▶ Heti 4 óra előadás, heti 2 óra gyakorlat, Neptun szerint
- ▶ Tárgyhonlap: `cs.bme.hu/valszam` = `cs.bme.hu/valszamuj`
- ▶ 1 zh: október 27. (8. hét hétfő) 8-10, pótzh: november 10. (10. hét hétfő) 8-10, pótpótzh: december 15. (póthét hétfő)???
- ▶ Írásbeli vizsga
- ▶ IMSc pontozás: lásd később

Az előadások anyaga, segédanyagok

- ▶ Kb. 1–10./11. hét: valószínűesszámitás (+ a 2. hét körül kombinatorika)
- ▶ Kb. 10./11.–14. hét: bevezető statisztika (új anyag 2023 óta)

Jegyzetek, segédanyagok:

- ▶ Valószínűesszámitás anyagrész: Mészáros Szabolcs 2021-es jegyzete (→ tárgyhonlap). Idén aktualizálva, de az előadás nem mindig ugyanazt a sorrendet és felépítést követi, mint a jegyzet.
- ▶ Ezért az áttekinthetőség és orientáció érdekében ehhez az anyagrészhez fogok **vázlatos** diásorokat készíteni.
- ▶ Definíciók, tételek, ábrák, táblázatok → a diásorokon, bizonyítások, bizonyos példák, feladatok → a táblánál.
- ▶ Csak a diásorokon szereplő anyagrészek (+ bizonyítások a táblánál): kombinatorika, nemnegatív valószínűségi változók várható értéke, valószínűségi változók szimulációja.
- ▶ A statisztika anyagrészt a Mészáros Szabolcs jegyzetéhez általam írt kiegészítés (→ tárgyhonlap) alapján mondom el, de itt is lesz diásor. A jegyzet(kiegészítés)ben az előadáson nem tárgyalt témák is szerepelnek.

Az előadások anyaga, segédanyagok

- ▶ Kb. 1–10./11. hét: valószínűesszámítás (+ a 2. hét körül kombinatorika)
- ▶ Kb. 10./11.–14. hét: bevezető statisztika (új anyag 2023 óta)

Jegyzetek, segédanyagok:

- ▶ Valószínűesszámítás anyagrész: Mészáros Szabolcs 2021-es jegyzete (→ tárgyhonlap). Idén aktualizálva, de az előadás nem mindig ugyanazt a sorrendet és felépítést követi, mint a jegyzet.
- ▶ Ezért az áttekinthetőség és orientáció érdekében ehhez az anyagrészhez fogok **vázlatos** diásorokat készíteni.
- ▶ Definíciók, tételek, ábrák, táblázatok → a diásorokon, bizonyítások, bizonyos példák, feladatok → a táblánál.
- ▶ Csak a diásorokon szereplő anyagrészek (+ bizonyítások a táblánál): kombinatorika, nemnegatív valószínűségi változók várható értéke, valószínűségi változók szimulációja.
- ▶ A statisztika anyagrészt a Mészáros Szabolcs jegyzetéhez általam írt kiegészítés (→ tárgyhonlap) alapján mondom el, de itt is lesz diásor. A jegyzet(kiegészítés)ben az előadáson nem tárgyalt témák is szerepelnek.

További jegyzetek (lásd tárgyhonlap)

- ▶ Vetier András - Valószínűségszámítás I-IV.
- ▶ Mitzenmacher, Upfal - Probability and Computing
- ▶ Noemi Kurt - Stochastik für Informatiker (2. kiadás: Stochastik für das Informatikstudium)
- ▶ youtube (20 perces videók, nem a komplett előadások; 3Blue1Brown csatorna)
- ▶ További linkek Mészáros Szabolcs jegyzetében

Az „össznépi gyakorlat”

A régi Valószínűségszámítás (VISZAB02) tárgyhoz képest

- ▶ a tárgy anyagmennyisége kb. a másfélszeresére nőtt,
- ▶ az előadások óraszámja a duplájára,
- ▶ a gyakorlatok mennyisége pedig sajnos nem nőtt.

Az előadásokon fennmaradó „szabadidő” felhasználása:

- ▶ interaktív oktatási formák, kvízek (Menti, Google Forms stb., kb. 2–3 előadásonként),
- ▶ kiegészítő anyagok (pl. informatikai/algorithmikus alkalmazások),
- ▶ a gyakorlatok leterheltségének enyhítése.

Az utóbbi keretében a gyakorlati feladatsorról bizonyos feladatokat az előadáson fogunk megoldani („össznépi gyakorlat”).

Az össznépi feladatmegoldás nem különül el időben az előadás többi részétől, bármelyik alkalommal lehet ilyen.

Egy-két alkalommal lehet tömbösítve egy fél vagy egész előadáson csak feladatmegoldás, ilyen esetekben előre szólni fogok.

IMSc-s szorgalmi feladatok

- ▶ A feladatsorokon 10 db **IMSc-s szorgalmi házi feladat**, amikkel 10–10 pontot lehet szerezni. Az összpontszámot 10-zel osztva adódik a feladatokból megszerzett IMSc-pontok száma.
- ▶ IMSc-s házi feladatot bárki beadhat, nemcsak az IMSc-s hallgatók.
- ▶ Az IMSc-s házi feladatait mindenkinek a (Neptun szerinti) gyakorlatvezetője javítja. A beadás módját (papír, email, Teams stb.) és pontos határidejét a gyakorlatvezetők egyénileg szabályozzák az alábbi elvek szerint:
 - ▶ a beadásra az adott gyakorlathoz képest mindig legalább kb. két hetet adunk,
 - ▶ késedelmes beadásra a gyakorlatvezetőtől kell engedélyt kérni, amit ő csak akkor adhat meg, ha az adott feladatot még egy hallgató sem kapta vissza kijavítva.

Néhány szó a gyakorlatokról

- ▶ A többi SzIT-es tárgyhoz hasonlóan a gyakorlatokon a közös feladatmegbeszélés mellett fontos cél az **önálló feladatmegoldás** gyakorlása is.
- ▶ Ennek segítésére lesznek (nem kötelező) házi feladatok is → megbeszélés a következő gyakorlaton igény és lehetőség szerint.
- ▶ A gyakorlati feladatokhoz (az IMSc-s feladatok kivételével) a gyakorlatok lezajlása után közzéteszünk
 - ▶ **végeredményeket** (azoknak, akik önállóan szeretnének gyakorolni és a saját eredményeiket szeretnék ellenőrizni)
 - ▶ és **megoldásokat** (azoknak, akiknek a teljes megoldás menetéhez kell segítség).

Zh és vizsga

- ▶ Mindkettőn 6 db 20 pontos feladat lesz. 100 pont számít 100%-nak.
- ▶ Az aláírás megszerzésének feltétele, hogy a zh eredménye legalább 40%-os (40 pontos) legyen.
- ▶ Sikeres aláírás után az írásbeli vizsgán is 40% (40 pont) kell a tárgy sikeres teljesítéséhez.
- ▶ A tárgy sikeres teljesítése esetén a zh pontszáma (de maximum 100 pont)*0,4 + a vizsga pontszáma (de maximum 100 pont)*0,6 lesz a hallgató végső pontszáma. Ponthatárok: 40,55,70,85%.
- ▶ Ha az írásbeli vizsga eredménye legalább kettes, szóbelizéssel maximum egy jegyet lehet javítani vagy rontani.
- ▶ A pótzh-n pótolni és javítani is lehet, nem kell rá jelentkezni.
- ▶ Sikeres zh utáni javító szándékú pótzh sikertelensége esetén az aláírás megmarad, de a zh-pontszám 40-re csökken. Sikeres vizsga utáni javító szándékú vizsgán viszont meg lehet bukni!
- ▶ Pótpótzh: jelentkezés a Neptunban díjfizetéssel, javítani nem lehet.
- ▶ A 100 pont feletti résznek a zh-n a fele, a vizsgán **idéntől az egésze** IMSc pont. A házi feladatokkal együtt összesen legfeljebb 30 IMSc-pont szerezhető (szóbelin 0), az összeget lefelé kerekítjük.

Zh és vizsga szabályai

- ▶ A rendelkezésre álló munkaidő a zh-n 90, a vizsgán 100 perc.
- ▶ A vizsgán 1 feladat elmélet → félév végén elmondom, hogy mi lehet benne.
- ▶ Csak előre összetűzött lapokon lehet dolgozni, a piszkozatlapot is beleértve.
- ▶ Az első 30 percben kimenni, utána bejönni nem lehet.
- ▶ Az első oldal jobb felső sarkán szerepeljen: a hallgató neve, Neptun-kódja és a Neptun szerinti gyakorlatvezetője neve.
- ▶ A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítve várjuk.
- ▶ A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges. A lépéseknél a felhasznált tulajdonságok és tételek is jelzendők.
- ▶ Segédeszközként csak (grafikus megjelenítésre nem alkalmas) számológép, a hallgató saját tudása és az **általunk kiosztott** eloszlástáblázatok és (a vizsgán, ha szükség van rájuk) az **általunk kiosztott** képletgyűjtemények használhatók.

Kisebb reformok az idei évben

A gyakorlatokon az önálló munka lehetőségének növelése és az anyag könnyebb feldolgozhatósága érdekében idéntől

- ▶ a statisztika anyagrészt jelentősen csökkentettük → a kimaradó anyagrész szerepel a tanszék MSc-s *Matematikai statisztika* tárgyában,
- ▶ cserébe viszont a statisztikán belül megmaradó anyagrészekkel a gyakorlatokon részletesebben foglalkozunk, a megértést segítő, új feladattípusokkal,
- ▶ néhány nehezebben emészthető fogalmat és kisebb anyagrészt a valószínűségszámítási anyagrészből is törünk,
- ▶ egy-két fontos, de meglehetősen nehéz anyagrészt a továbbiakban csak 6-os („csillagos”) feladatban kérdezzük a zh-n és vizsgán, és ezek egy részéről csak előadáson lesz feladatmegoldás. Részletek később.

Változások összefoglalása vizsgakurzusos hallgatóknak:

<https://cs.bme.hu/~tobias/valszam2023/vk.pdf>

Segítség a zh-ra és a vizsgára való felkészüléshez

- ▶ Pár régi zh és vizsga megoldással elérhető a tárgyhonlapon.
- ▶ A tavalyi zh talán **kicsit könnyebb volt a szokásosnál**, ugyanis jobban sikerült, mint máskor. Zh-felkészüléshez mindenképpen érdemes a többi régi zh-t (és a tavalyi pótzh-t) is átnézni.
- ▶ Minta zh nem lesz, de gyakorló feladatsor igen (ehhez vég-eredmények lesznek, a konzultációkon lehet róluk kérdezni).
- ▶ A holnapon elérhető vizsgákban van egy-két feladat, ami idén már nem szerepelhet az anyag csökkentése miatt. Ezeket a tárgyhonlapon jelzem, szükség esetén a feladatokat is megváltoztattam (ha a feladat az eredeti formájában már nem kitűzhető, de kissé módosítva igen).
- ▶ Ajánlom a vizsgára a **statisztika mintafeladatokat** is → az anyag módosításának megfelelően frissítve. **Tartalmaz olyan feladattípusokat is, amiket a tavalyi(előtt)i vizsgák nem.**
- ▶ Konzultációk:
 - ▶ zh előtt a gyakorlatvezetők szervezésében,
 - ▶ vizsga előtt központilag, Neptunon meghirdetett időpontban.

További gondolatok, visszacsatolás

A tárgy jelen változatában két éve indult először, idén pedig jelentősen módosul az anyag.

Az előadás tartásának módjával (diasor/tábla stb.), a gyakorlati feladatsorokkal és az új formátumokkal (össznépi gyakorlat, feladatsorok, kiegészítő anyagok, interaktív tevékenységek stb.) kapcsolatban minden visszajelzésnek örülök!

Pedagógiai szempontból az „össznépi gyakorlat” helyett persze jobb lenne egy második „rendes” gyakorlat, de ehhez több oktató és több anyagi erőforrás kellene. Így mindenkinek javaslom mind az előadás, mind a gyakorlat látogatását, annak érdekében, hogy lépést tudjon tartani az anyaggal.

Az első 2–3 előadás témája viszonylag könnyű, részben középiskolai anyag. **Később az anyag nehezedik!** Sajnos tavaly sok példát láttunk jó zh-eredmény után gyenge vizsgaeredményre. Érdemes folyamatosan tanulni a zh után is, mert az anyag mennyisége is nagy.

Bevezető 1.

Mi a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika?

Az első két diászor jelentős mértékben tartalmaz Noemi Kurt (TU Berlin) diászorából, az első diászor Pintér Márta 2022-es előadásából is anyagokat.

Sztochasztika = a véletlen törvényszerűségének tudománya.

A **sztochasztika** két fő ága:

- ▶ **Valószínűségelmélet**: matematikai modellezés és formalizmus, elméleti alapok
- ▶ **Statisztika**: véletlen eljárásokból származó minták/mérési adatok elemzése és interpretációja valószínűségelméleti módszerek segítségével
 - ▶ mi itt csak a **matematikai** statisztikával foglalkozunk, vagyis már meglévő mérési adatok elemzésével.
Nem vizsgáljuk, hogy hogyan kell pl. műszaki területen helyesen mérni (→ mérnöki tudományok) vagy valamilyen társadalmi vizsgálat esetén reprezentatív mintát venni (→ társadalomtudományok).

Szorosan kapcsolódó tudományágak például:

- ▶ véletlen gráfok és hálózatok, véletlen algoritmusok
- ▶ biztosításmatematika, pénzügyi matematika
- ▶ statisztikus fizika
- ▶ kvantumfizika, kvantumalgoritmusok

A Valszámra épülő informatikai szakmai területek

(Szekeres Dániel leírása nyomán)

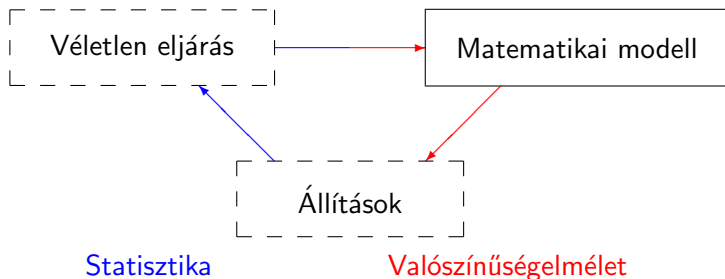
- ▶ Mesterséges intelligencia → gépi tanulás, neurális hálózatok
BSc-n Mesterséges intelligencia tárgy, MSc-n Intelligens rendszerek mellékspecializáció (MIT)
- ▶ Összetett rendszerek tervezése → fontos a megbízhatóság, rendelkezésre állás, biztonságkritikus rendszerek esetén (hardware meghibásodásból eredő) balesetokozás valószínűségének modellezése a tervezéskor → *Informatikai rendszertervezés, Kiberfizikai rendsz.*
- ▶ Mérési zaj kezelése és javítása: valószínűségi alapon
Pl. orvosi képdiagnosztika (MIT)
- ▶ Adatelemzés, adattudomány, adatinformatika → statisztikán
(*Matematikai statisztika MSc-n (SzIT)*) alapul
Adat- és médiainformatika (TMIT), big data szabvánnyal tárgyak
- ▶ Adatok tömörítése, megbízható adatvitelhez hibajavító kódok használata is gyakran valószínűségi alapú
BSc-n Kódolástechnika (HIT), MSc-n Információelm. (SzIT)
- ▶ Teljesítménymodellezés, sorbanállási modellek, Markov-láncok
Tömegkiszolgálás (TMIT), MSc-n Sztochasztika tárgy (TTK MI)

A tárgy célja: A matematikai alapok elsajátítása, amelyekre a felsorolt és más alkalmazások épülnek.

Az előadás tartalma és felépítése:

- ▶ Matematikai alapfogalmak: valószínűségek, események, valószínűségi változók, függetlenség stb.
- ▶ Valószínűségi változók mérőszámai (pl. várható érték, szórás, korreláció) és kiszámításuk
- ▶ Fontos példák és előfordulásuk → pl. melyik nevezetes valószínűségi eloszlás mit modellez?
- ▶ A statisztika módszereinek alapjai (pl. becsléstudomány, statisztikai próbák)
- ▶ Példák véletlent használó algoritmusokra, egyéb informatikai alkalmazásokra

Sztochasztika



Valószínűségelmélet:

Idealizálás és formalizálás $\Rightarrow$ **univerzálisan felhasználható**

Egy elmélet, sok felhasználási területtel

Modellezés gyakorlása $\rightarrow$ **szöveges feladatok**

„A valsám az életről szól.” (Balázs Márton)

Statisztika:

Sokfajta módszer, módszerválasztás a konkrét felhasználásnak megfelelően

Az előtanulmányi követelményekről – összintén

- ▶ A véletlen mennyiségek egy jelentős része **folytonos** → elkerülhetetlen az analízis eszköztárának használata.
- ▶ A zh-ig főleg egyszerű egyváltozós függvények (polinomok, exponenciális függvények stb.) deriválására–integrálására lesz szükségünk, kb. a 4–5. héttől kezdve.
- ▶ A tárgy felvételének hivatalos követelménye: Analízis 1. De szükségünk lesz olyan, az Analízis 2-ből ismert eszközökre is, mint a parciális deriváltak és az integrálás két változóban, kb. a 6–8. héttől kezdve.
- ▶ A korábbi SzIT-es tárgyakból a lineáris algebrára (→BSz1) fogunk leggyakrabban visszautalni, néha a gráf- és algoritmuselméletre is.

Egy megjegyzés a mértékelmélet szerepéről

A modern valószínűségelmélet a **mértékelméletre** épül, ami a hosszúság, terület, térfogat és integrál fogalmai általánosításának és egységesítésének a 20. század elején keletkezett elmélete.

A mérnökinformatikus-alapképzésben nincs mértékelméleti tárgy, így a Valszám tárgy sem használ sok mértékelméletet.

A mértékelmélet hiánya remélhetőleg nem fog érdemi zavart okozni a Valszám anyagának elsajátításában.

Viszont azt maga után vonja, hogy nem fogunk tudni mindent olyan pontosan bizonyítani, mint például BSz-ből.

Egyes bizonyítások vázlatosak lesznek vagy csak speciális esetekre vonatkoznak, más bizonyításokat teljesen elhagyunk.

A hiányzó bizonyításokkal kapcsolatos kérdésekre szívesen válaszolok az órák után. Az érdeklődőknek ajánlom a TTK-s hallgatóknak szóló mértékelméleti és sztochasztikai tárgyakat is.

Most következik a történeti áttekintés, amihez áttérünk Pintér Márta tanárnő 2022-es diasorára (ezt nem fogom közzétenni).
Utána visszatérünk ide.

Bevezető 2: A valószínűségszámítás alapfogalmai

Véletlen

Véletlenszerű:

nem azt jelenti, hogy nincs oka annak, ami végbemegy, hanem pl. az okok egy része számunkra ismeretlen

minden körülmény adott $\Rightarrow$ egyértelmű lefolyás
csak egy részét vesszük figyelembe $\Rightarrow$ nem egyértelmű $\Rightarrow$ véletlenszerű

Példa: pénzérme feldobása

Véletlen kísérlet: olyan jelenség/kísérlet,

- ▶ aminek a kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen
- ▶ aminek eredménye előre nem mondható meg, csak a lehetséges kimenetek halmaza

Véletlen

Véletlenszerű:

nem azt jelenti, hogy nincs oka annak, ami végbemegy, hanem pl. az okok egy része számunkra ismeretlen

minden körülmény adott $\Rightarrow$ egyértelmű lefolyás
csak egy részét vesszük figyelembe $\Rightarrow$ nem egyértelmű $\Rightarrow$ véletlenszerű

Példa: pénzérme feldobása

Véletlen kísérlet: olyan jelenség/kísérlet,

- ▶ aminek a kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen
- ▶ aminek eredménye előre nem mondható meg, csak a lehetséges kimenetek halmaza

Alapfogalmak, jelölések

- ▶ Ω **eseménytér**: lehetséges kimenetek halmaza (nem üres)
- ▶ $\omega \in \Omega$ **kimenetel**: az eseménytér elemei. Az $\{\omega\}$ egyelemű halmazt **elemi eseménynek** nevezzük.
- ▶ $A \subseteq \Omega$ **események**: az eseménytér **bizonyos** részhalmazai.

Egy esemény **bekövetkezik**: olyan elemi esemény realizálódik a kísérlet végrehajtásakor, ami eleme.

Az eseményt megadhatjuk az elemi megadásával, de logikai kifejezéssel is.

Példa: kockadobás – “párosat dobunk”, focimeccs – “győz a magyar válogatott”

elemi esemény is esemény – egyelemű halmaz

összetett esemény – legalább két elemű halmaz

Műveletek eseményekkel (halmazműveletek)

események = halmazok $\Rightarrow$ műveletek $\Rightarrow$ halmazműveletek

Legyenek A és B események. Ekkor

- ▶ $A \cup B$ unió: akkor következik be, ha legalább az egyik
($A \cup B$ bekövetkezik $\Leftrightarrow A$ vagy B bekövetkezik)



- ▶ $A \cap B$ metszet: akkor következik be, ha mindkettő
($A \cap B$ bekövetkezik $\Leftrightarrow A$ és B is bekövetkezik)



- ▶ $A \setminus B$ különbség: akkor következik be, ha A bekövetkezik, de

B nem



- ▶ $\bar{A} = \Omega \setminus A$ komplementer: akkor következik be, ha A nem

következik be



- ▶ Ω biztos esemény



- ▶ $\emptyset$ lehetetlen esemény



A műveletek tulajdonságai

- ▶ $\overline{\overline{A}} = A$
- ▶ $A \cap A = A \cup A = A$
- ▶ $A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
- ▶ $A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A$
- ▶ a metszet kommutatív: $A \cap B = B \cap A$ és asszociatív:
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Ezek jelölése: $A \cap B \cap C$
- ▶ hasonlóan az unió is kommutatív és asszociatív
- ▶ a metszet disztributív az unióra nézve:
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ▶ fordítva is igaz: az unió disztributív a metszetre nézve

De Morgan-azonosságok

- ▶ Két eseményre: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ▶ Események egy végtelen sorozatára is igaz: $\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$
és $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

Műveletek eseményekkel, példa

Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az alábbi eseményeket:

- ▶ legalább egy esemény teljesül
- ▶ A és B teljesül, de C nem
- ▶ minden esemény teljesül
- ▶ egyik esemény sem teljesül
- ▶ pontosan egy esemény teljesül

Műveletek eseményekkel, példa

Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az alábbi eseményeket:

- ▶ legalább egy esemény teljesül: $A \cup B \cup C$
- ▶ A és B teljesül, de C nem: $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap \overline{C}$
- ▶ minden esemény teljesül: $A \cap B \cap C$
- ▶ egyik esemény sem teljesül: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$
- ▶ pontosan egy esemény teljesül:
 $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

További műveletek eseményekkel

- ▶ $A \subseteq B$ részhalmaz: A -ból következik B , A maga után vonja B -t.
- ▶ $A \cap B = \emptyset$: A és B **kizáróak**, nem következhetnek be egyszerre
- ▶ Legyen $A_1, A_2, \dots$ események egy végtelen sorozata.
 $A_1, A_2, \dots$ **páronként kizáróak**, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén. (Véges sok esemény esetén ugyanígy definiáljuk a páronkénti kizáróságot.)

Események halmaza, hatványhalmaz

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ rögzített halmaz.

Jelölje $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω összes részhalmazainak halmazát.

(Ezt az Ω **hatványhalmazának** nevezzük, $\mathcal{P}$ =power set.)

Mi az, hogy Ω „bizonyos” részhalmazai az események?

Az összes esemény halmazát $\mathcal{F}$ -fel fogjuk jelölni.

A legtöbb gyakorlati alkalmazásban (pl. **véges** Ω esetén szinte mindig) Ω minden részhalmazát eseménynek fogjuk tekinteni.

Ezekben az esetekben: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Általában: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Összetettebb eseménytereknél (pl. $\Omega = \mathbb{R}$) a $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ választás itt nem részletezett mértékelméleti problémákhoz vezetne.

- ▶ Ilyen esetekben is elvárjuk, hogy $\mathcal{F}$ teljesítsen bizonyos feltételeket, pl. tartalmazza az Ω biztos eseményt és zárt legyen bizonyos halmazműveletekre nézve.

Az ilyen feltételeket teljesítő $\mathcal{F}$ -et **σ -algebrának** nevezzük.

- ▶ Ennek részleteit idéntől nem tárgyaljuk, de az érdeklődők megtalálhatják a σ -algebra definícióját Mészáros Szabolcs jegyzetében: lásd 1.2.2. Definíció.

Események halmaza, hatványhalmaz

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ rögzített halmaz.

Jelölje $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω összes részhalmazainak halmazát.

(Ezt az Ω **hatványhalmazának** nevezzük, $\mathcal{P}$ =power set.)

Mi az, hogy Ω „bizonyos” részhalmazai az események?

Az összes esemény halmazát $\mathcal{F}$ -fel fogjuk jelölni.

A legtöbb gyakorlati alkalmazásban (pl. **véges** Ω esetén szinte mindig) Ω minden részhalmazát eseménynek fogjuk tekinteni.

Ezekben az esetekben: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Általában: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Összetettebb eseménytereknél (pl. $\Omega = \mathbb{R}$) a **$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$** választás itt nem részletezett mértékelméleti problémákhoz vezetne.

- ▶ Ilyen esetekben is elvárjuk, hogy $\mathcal{F}$ teljesítsen bizonyos feltételeket, pl. tartalmazza az Ω biztos eseményt és zárt legyen bizonyos halmazműveletekre nézve.

Az ilyen feltételeket teljesítő $\mathcal{F}$ -et **σ -algebrának** nevezzük.

- ▶ Ennek részleteit idéntől nem tárgyaljuk, de az érdeklődők megtalálhatják a σ -algebra definícióját Mészáros Szabolcs jegyzetében: lásd 1.2.2. Definíció.

Valószínűségi mező

(1.3.1. Definíció.) Legyen $\Omega \neq \emptyset$ egy eseménytér és $\mathcal{F}$ az események családja (azaz egy σ -algebra az Ω halmazon). Ekkor egy $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ függvényt **valószínűségi mértéknek** nevezünk, ha

- ▶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ▶ és ha $A_1, A_2, \dots$ olyan eseménysorozat, amire minden $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

(1.3.2. Definíció.) Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük, ha $\Omega \neq \emptyset$ egy halmaz, $\mathcal{F}$ a megfelelő események halmaza és $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték ($\mathcal{F}$ -en).

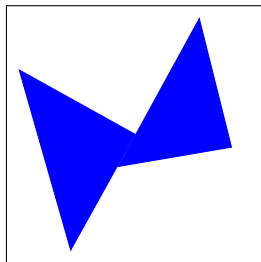
1.3.5. Állítás: Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. (Bizonyítás)

Következmény: minden $A \in \mathcal{F}$ eseményre $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(1.3.3. Példa: kockadobás. Speciális esete az alábbinak:

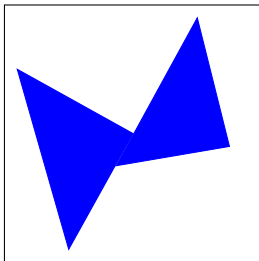
Klasszikus valószínűségi mező: Ω véges halmaz, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,
 $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{\text{"kedvező esetek száma"}}{\text{összes eset száma}}, \forall A \subseteq \Omega$

Geometriai valószínűségi mező



„Találomra” (avagy “teljesen véletlenszerűen”, avagy “egyenletes eloszlás szerint” – lásd később) választunk egy pontot a fehér négyzeten. Mennyi a valószínűsége, hogy a kék tartományba esik?

Geometriai valószínűségi mező



Geometriai valószínűségi mező esetén Ω az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza (itt a fehér négyzet), a valószínűség pedig a területtel arányos:

$\mathbb{P}(\Omega\text{-n véletlenszerűen választott pont a kék tartományba esik})$

$$= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{T_{\text{kék tartomány}}}{T_{\Omega}}.$$

A képlet a kék tartomány helyett igaz bármilyen Jordan-mérhető tartományra (pl.: sokszögek, körök, ezek véges metszetei/uniói/különbségei).

Pl.: $\mathbb{P}(\text{a választott pont } \Omega\text{-ba esik}) = \frac{T_{\Omega}}{T_{\Omega}} = 1.$

Számítási példák: gyakorlaton (és zh-n!).

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 3 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

(Hívják szitaformulának is)

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 3 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

(Hívják szitaformulának is)

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 3 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

(Hívják szitaformulának is)

Általános Poincaré-formula

Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = ?$$

A kettő, illetve három halmazra vonatkozó Poincaré-formulához hasonlóan: „**páratlan sok halmaz metszetének valószínűsége mindig pozitív, páros soké mindig negatív előjellel számít**”.

$$\begin{aligned} \text{Pl. } n = 4 \text{ darab esemény esetén: } & \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Ugyanez formálisan: egy n természetes szám esetén legyen

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}. \text{ Így } [0] = \emptyset.$$

Általános Poincaré-formula

Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = ?$$

A kettő, illetve három halmazra vonatkozó Poincaré-formulához hasonlóan: „**páratlan sok halmaz metszetének valószínűsége mindig pozitív, páros soké mindig negatív előjellel számít**”.

Ugyanez formálisan: egy n természetes szám esetén legyen

$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$. Így $[0] = \emptyset$.

Ekkor $k = 1, \dots, n$ esetén $[n]$ egy tipikus k -elemű részhalmaza $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Legyen

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \subseteq [n]: |I|=k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Vagyis S_k az összes k -as metszet valószínűségének összege.

(1.4.2. Tétel, Poincaré-formula.) Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ eseményekre $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$.

Bonferroni-egyenlőtlenség

Az unió valószínűségéről akkor is kaphatunk információt, ha csak a szumma első néhány tagját nézzük és a maradékot elhanyagoljuk (pl. mert a gyakorlatban annyira kicsik és lassan számolhatók):

(1.4.3. Állítás: Bonferroni-egyenlőtlenségek.) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, és $1 \leq m_1, m_2 \leq n$ egészek, ahol m_1 páratlan és m_2 páros. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k+1} S_k \quad \text{és} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k+1} S_k.$$

Vagyis: ha egy páratlan indexig (m_1 -ig) adjuk össze a Poincaré-formulában a tagokat, az mindig felső becslést ad. Ha egy páros indexig (m_2 -ig), az mindig alsó becslést. (A becslés lehet pontos.)

Bonferroni-egyenlőtlenség

Az unió valószínűségéről akkor is kaphatunk információt, ha csak a szumma első néhány tagját nézzük és a maradékot elhanyagoljuk (pl. mert a gyakorlatban annyira kicsik és lassan számolhatók):

(1.4.3. Állítás: Bonferroni-egyenlőtlenségek.) Legyenek

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, és $1 \leq m_1, m_2 \leq n$ egészek, ahol m_1 páratlan és m_2 páros. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k+1} S_k \quad \text{és} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k+1} S_k.$$

Nem bizonyítjuk. Szemléltetésül: $n = 3$ esetén a Poincaré-formulából következik:

- ▶ $m_1 = 1$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3),$
- ▶ $m_2 = 2$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3),$
- ▶ $m_1 = 3$ esetén a 3 eseményre vonatkozó Poincaré-formulát kapjuk (= helyett $\leq$ -vel, amivel persze szintén igaz).

Boole-egyenlőtlenség

A Poincaré-formulát most nem bizonyítjuk. Lehet pl. teljes indukcióval bizonyítani.

Lesz pár hét múlva: rendes és egyszerű bizonyítás a 3 eseményre vonatkozó Poincaré-formulára $\rightarrow$ biz. ötlete n eseményre.

A következő állítás első fele azt mutatja, hogy a valószínűségek összege mindig felső korlát az unió valószínűségére – akkor is, ha az események nem kizáróak:

(1.4.4. Következmény, Boole-egyenlőtlenség.) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_j}).$$

Az első állítást nem bizonyítjuk, a második az elsőből és a De Morgan-azonosságokból (amiket az $\overline{A_j}$ eseményekre alkalmazunk) következik.