Vizsgadolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket az előadáson elhangzott definíciók és állítások alapján. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és legyenek $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók.

   (a) Mikor mondjuk azt definíció szerint, hogy X és Y függetlenek?

   (b) Ha X és Y független valószínűségi változók, hogyan számíthatjuk ki a két változó szorzatának várható értékét a változók várható értékei segítségével, ha ezek a várható értékek mind léteznek? (Az $\mathbb{E}$ jelölést magyarázat nélkül használhatjuk a szokásos módon.)

   (c) Legyen $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy X folytonos és $g(X)$ várható értéke létezik. Jelölje $x \mapsto f_X(x)$ az X sűrűségfüggvényét. Hogyan számíthatjuk ki ekkor $g(X)$ várható értékét?

   Megoldás.
   (a)
   (5 pont) Ha az $\{X < x\}$ és az $\{Y < y\}$ események minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén függetlenek.
   (A nívóhalmazok jelentését nem kell megmagyarázni, természetesen jó úgy is, hogy $\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) < x\}$. A függetlenség kimondható valószínűségekkel is: $\mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}(X < x)\,\mathbb{P}(Y < y)$.)
   (b)
   (5 pont) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
   (c)
   (10 pont) $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$.

   Javítási instrukciók:
   (a)
   Ha diszkrétben vagy folytonosban fogalmazza meg az abban az esetben ekvivalens definíciót, akkor max. 2 pont.
   Ha feltételes valószínűségekkel fogalmazza meg, de a jó eseményekkel dolgozik, akkor max. 3

pont. Ha nem a jó eseményekkel dolgozik, de pl. diszkrét esetben pozitív valószínűségű eseményeknél jó, amit ír, akkor max. 1 pont.
Ha nem szerepel a „$\forall x, y \in \mathbb{R}$” kitétel, akkor max. 3 pont, egyéb okból is hibás/hiányos megoldás esetén max. 2 pont, a korábbiak szerint eleve csak 1 pontos megoldás esetén 0 pont.
(b)
$\mathbb{E}(\cdot)$ helyett $\mathbb{E}[\cdot]$ és $\mathbb{E}\cdot$ is jó, de utóbbi csak akkor, ha konzisztensnek és hihetőnek tűnő módon használja. Kétes esetben a javító dönt. $\mathbb{E}\{\cdot\}$-ért legalább egy pont levonás.
(c)
Kisebb szintaktikai hibákért adható részpont. Például ha f_X helyett f van, akkor max. 8 pont, ha f_X-nek nem jó az argumentuma, akkor pedig max. 6 pont. Ha nincsenek integrálási határok, akkor max. 4 pont, ha pedig rosszak, akkor max. 1 pont.

2. Egy szabályos dobókocka feldobását az első **hatosnál kisebb** eredményig ismételjük. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát (beleértve az első nem hatos dobást is).

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a kockát legalább háromszor fel kell dobnunk?

   (b) Határozzuk meg X szórását és X^2 várható értékét.

   (c) Feltéve, hogy hét dobás után még nem sikerült egyszer sem hatosnál kisebbet dobnunk, mi a valószínűsége, hogy az utána következő két dobásban sem sikerül?

   (d) Definiáljuk ugyanebben a kísérletben az Y valószínűségi változót a következőképpen: $Y = 1$, ha a második dobás eredménye nem hatos és $Y = 0$ egyébként (ha nincs második dobás, Y értéke akkor is 0). Független-e X és Y?

Megoldás.
(a) (6 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \geq 3)$. (Ha ezt nem írja oda expliciten, de később ennek megfelelő képlettel számol, akkor jár ez a pont is.)
(1 pont) X geometriai eloszlású
(1 pont) $p = 5/6$ paraméterrel (nem kell a p jelölés és indoklás sem kell).
(1 pont) Ezért $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ (ez csak akkor jár, ha megvan a komplementer valószínűség és az esetszétbontás is)
(1+1 pont) $= 1 - p - p(1-p) = 1 - \frac{5}{6} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
(A p jelölés itt sem kötelező, elég, ha konkrét számokkal megvan, illetve ha p-vel megvan, azért jár 1 pont a 2-ből, és utána a végeredményt további részletszámolás nélkül elhisszük.)
Az is elfogadható, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X > 2) = (1-p)^2$, ahol az utóbbi két lépés összevonható és p helyett megint OK a konkrét 5/6 paraméterrel is (ha azonosítható, hogy ez a p). Úgy tekintem, hogy a $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$ képlet szerepelt előadáson (ha nem is nagyon hangsúlyoztam).
Nem kell komplementer valószínűséggel számolni, ha $\mathbb{P}(X \geq 3)$-at a végtelen mértani sor összegképletével számolja ki. Ekkor a $\mathbb{P}(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=3}^{\infty} (1-p)^{k-1}$ vagy hasonló képletre még csak 1 pont jár, a további 2 pont csak akkor jár, ha jól alkalmazza a végtelen mértani sor összegképletét és jó végeredményt hoz ki (kizárólag számolási, de nem elvi hiba esetén lehet a 2-ből 1 pontot adni).

(b) (6 pont)
(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$
(1 pont) $= \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$ (az előző lépéssel összevonható)
(1 pont) $= \sqrt{\frac{1/6}{25/36}} = \sqrt{\frac{6}{25}} \approx 0{,}4899$.
(A numerikus végeredmény kell, viszont ha az előző lépés és p jó, akkor részletszámolások nem

kellenek. Ha az előző lépés hiányzik, de vannak jó részletszámolások a konkrét p-re, amik egyértelműen ugyanabból a számolásból származnak, akkor ez a lépés az előzővel összevonható.)
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$
(1 pont) $= \frac{6}{25} + \frac{1}{p^2} = \frac{6}{25} + \frac{36}{25}$ (itt az 1 pont az $1/p^2$-re és az abba való behelyettesítésre jár. Jó konkrét p-vel is, ha azonosítható, hogy így csinálja)
(1 pont) $= \frac{42}{25} (= 1{,}68)$. (Elfogadjuk közönséges tört, végtelen szakaszos tizedestört és négy tizedesjegyre kerekített tizedestört alakban is.)

(c) (4 pont)
(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(X > 9|X > 7)$ (avagy $\mathbb{P}(X > 7 + 2|X > 7)$, $\geq$-kkel helyesen megfogalmazva is OK)
(1 pont) A geometriai eloszlás örökifjúsága (elég: az örökifjúság) miatt
(1 pont) ez $\mathbb{P}(X > 2)$-vel egyenlő (az is jó, ha nem írja fel a feltételes valószínűséget, hanem azt mondja, hogy az örökifjúság miatt $\mathbb{P}(X > 2)$-t keressük, de ha az örökifjúság hiányzik, akkor csak ez a pont jár rá és az előző kettő nem),
(1 pont) ami pont ugyanaz, mint az (a)-ban már kiszámított $\mathbb{P}(X \geq 3)$ valószínűség, vagyis $\frac{1}{36}$. (Ha kiszámolja, arra is 1 pont jár.)

(d) (4 pont)
Önmagában annak kimondására, hogy nem függetlenek, nem jár pont.
(1 pont) arra, hogy kimondja, hogy nem függetlenek, és ad hozzá egy indoklást, ami legalább szintaktikailag nagyjából rendben van és hihető, hogy tényleg komolyan gondolja.
(1 pont) arra, hogy azzal akarja belátni, hogy nem függetlenek, hogy van olyan x és y, amelyre $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \neq \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$.
(2 pont) arra, hogy talál is egy ilyen helyes (x, y) párt és megmondja, hogy mennyi $\mathbb{P}(X = x, Y = y), \mathbb{P}(X = x)$ és $\mathbb{P}(Y = y)$ (indoklás nem kell). Ilyen esetben jár az előző 1 pont is. Ha a bal oldal 0 és ezt odaírja, akkor elég odaírni, hogy a jobb oldalon szereplő egyik szorzótényező sem 0, nem kell kiszámolni ezen tényezők értékeit. Ha a bal oldal nem 0, akkor kellenek a jobb oldali tényezők értékei (indoklás ekkor sem kell).
Pl.: $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$ (mert ha $Y = 1$, akkor van 2. dobás, tehát nem lehet X értéke 1), $0 \neq \mathbb{P}(X = 1)(= \frac{5}{6})$, $0 \neq \mathbb{P}(Y = 1)(= \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36})$.
Lehet a függetlenség definíciója szerint is érvelni vagy $\mathrm{cov}(X, Y)$ nem nulla voltával, de ezek csak lényegesen hosszasabbak. Ha nincsenek befejezett és legfeljebb számolási hibákat tartalmazó számítások, akkor ilyen esetekben max. 1 pont.

3. Egy izzógyár mérnökei megfigyelték, hogy minél több izzót gyártanak egy napon, annál kisebb valószínűséggel lesz hibás egy-egy izzó. Ha egy napon $n \geq 1$ izzót készítenek, akkor minden izzó egymástól függetlenül $\frac{1}{2n}$ valószínűséggel lesz hibás.

   (a) Ha egy napon $n = 10$ izzót gyártanak, akkor mennyi az aznap gyártott hibás izzók számának várható értéke és szórásnégyzete (és miért)?

   (b) $n = 10$ esetén mi a valószínűsége, hogy 4-nél több, de 8-nál kevesebb izzó lesz hibás a 10 izzó közül? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.)

   (c) Tegyük fel, hogy egy napon n izzót gyártanak, ahol n nagyon nagy. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az adott napon pontosan 3 izzó lesz hibás. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

Megoldás.
(a) (6 pont)
(0 pont) Jelöljük X-szel az adott napon gyártott hibás izzók számát.
(1 pont) Ekkor X binomiális eloszlású

(1 pont) $n = 10$ (arra önmagában nem jár pont, hogy $n = 10$, csak arra, ha kiderül, hogy a binomiális eloszlásban a kísérletek számának megfelelő paraméter értéke 10)
(1 pont) és $p = \frac{1}{2\times 10} = \frac{1}{20}$ paraméterekkel (az n és p jelölések nem kötelezőek.),
(1 pont) ezért $\mathbb{E}(X) = np = \frac{1}{2}$ (Ha már n és p értéke is szerepelt, akkor itt elég a végeredmény)
(1 pont) és $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p)$
(1 pont) $= 10 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{40} = 0{,}475$ (elég csak közönséges tört vagy csak tizedestört alakban is. Ha a konkrét n-nel és p-vel van valami részletszámolás, akkor az előző pont is rendben van).
(b) (6 pont)
(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(4 < X < 8)$
(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7)$ (ha ez megvan, akkor jár az előző pont is)
(3 pont) $= \binom{10}{5}(\frac{1}{20})^5(\frac{19}{20})^5 + \binom{10}{6}(\frac{1}{20})^6(\frac{19}{20})^4 + \binom{10}{7}(\frac{1}{20})^7(\frac{19}{20})^3$ (az is elég, ha ez n-nel és p-vel kifejezve van meg és már elmondta, mi n és p értéke; az egyes helyes tagokért jár részpont)
(1 pont) $\approx 6{,}369 \cdot 10^{-5} = 0{,}00006369$. (Elég a végeredmény, mivel a számológép tud binomiális együtthatókkal számolni, de egyébként $\mathbb{P}(X = 5) = 6,0935 \cdot 10^{-5}$, $\mathbb{P}(X = 6) = 2,6726 \cdot 10^{-6}$, $\mathbb{P}(X = 7) = 8,0379 \cdot 10^{-8}$, utóbbi a négy értékes jegyre való kerekítésnél el is hagyható. Ha ezek a numerikus értékek megvannak, de az előző részben nincsenek meg a súlyfüggvény értékei, akkor abból a 3 pontból meg lehet adni utólag max. 2-t.)
(c) (8 pont)
(1 pont) arra, hogy Poisson-approximációt kell használni (még ha esetleg nem is sikerül, pl. nem tudja, hogy melyik változót közelítse Poissonnal vagy milyen paraméterű Poissonnal közelítse). Nem baj, ha ezt nem írja oda, feltéve, hogy jól alkalmazza a Poisson-approximációt (ide értve azt is, hogy λ-t elvileg helyesen határozza meg), de ha nem jól csinálja, akkor ez az 1 pont sem jár.
(1 pont) arra, hogy miért azt kell használni: elég valami olyasmi, hogy n nagyon nagy $p(= p_n)$ pedig nagyon kicsi (és a kettő szorzata egy pozitív számhoz tart és egy ilyen paraméterekkel rendelkező binomiális eloszlású val. változót közelítünk, de ezeket nem kötelező odaírni).
(1 pont) A hibás izzók száma egy Y Poisson-eloszlású valószínűségi változóval közelíthető,
(2 pont) amelynek paramétere $\lambda = \lim_{n\to\infty} np_n = \frac{1}{2}$. (A p_n jelölés nem kötelező, sőt ha azt írja, hogy np mindig 1/2, akkor a határértéket sem kötelező odaírni.)
(1 pont) Így tehát a keresett (közelítő) valószínűség $\mathbb{P}(Y = 3)$
(1 pont) $= \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{(1/2)^3}{3!}e^{-1/2}$ (elég a két alak közül az egyik. Az $(1/2)^3$ helyett szabad 1/8-ot, a 3! helyett 6-ot írni, de nem elég a puszta végeredmény, ha csak az van, akkor -1 pont)
(1 pont) $\approx 0{,}0126$.

Ha CHT-t akar használni (de nem nagyon akar összejönni), akkor a (c)-ben maximum 3 pont. Önmagában arra az ötletre, hogy használjuk a CHT-t, nem jár pont, és arra sem, hogy miért használhatjuk és hogy hivatkozunk rá (hiszen rossz). Viszont jár 1 pont arra, ha jól standardizál (vagyis a várható értéket vonja le, aztán pedig a szórással oszt le, ide értve a jobb oldal átalakítását). 1 pont arra, ha n és p behelyettesítésével – akár konkrét n-re és p-re, akár határértékben helyes határértékkel – kap egy numerikus eredményt a standardizált jobb oldalra. Még 1 pont, ha normális eloszlással közelíti a standardizált val. változót ÉS nem a $\mathbb{P}(X = 3)$-at akarja a normális eloszlásból kiolvasni, hanem valamilyen, folytonos val. változó esetén is viszonylag értelmes valószínűséget, például $\mathbb{P}(2{,}5 < X < 3{,}5)$-et vagy $\mathbb{P}(2 < X < 4)$-et (standardizálás után).

4. Legyenek $X \sim \mathrm{N}(1; 9)$ és $Y \sim \mathrm{N}(2; 16)$ független, normális eloszlású valószínűségi változók.

   (a) Mennyi $\mathbb{P}(X > 0{,}5)$?

   (b) Határozzuk meg $X + 2Y$ és $X - 4Y$ kovarianciáját és korrelációját.

   (c) Milyen eloszlású a $2X + Y$ valószínűségi változó és milyen paraméterekkel (és miért)?

Megoldás.

(a) (6 pont)
(1+1 pont) Sztenderdizálunk (ezt nem muszáj szövegesen odaírni):

$$\mathbb{P}(X > 0{,}5) = \mathbb{P}(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}(X)} > \frac{0{,}5 - \mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}(X)} = \mathbb{P}(\frac{X-1}{3} > \frac{0{,}5-1}{3})$$

(a két lépés összevonható, ha a második jó)
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z > -1/6)$, ahol $Z \sim \mathrm{N}(0;1)$ (az 1/6 helyett 4 értékes jegyre kerekített numerikus eredmény is jó)
(1 pont) $= \mathbb{P}(Z < 1/6) = \Phi(1/6)$ (elég a kettő közül az egyik, és nem kell a folytonosságra hivatkozni, mert a sűrűségfüggvény szimmetriája miatt a két integrál ugyanaz)
VAGY: $= 1 - \mathbb{P}(Z \leq -1/6) = 1 - \Phi(-1/6) = 1 - (1 - \Phi(1/6)) = \Phi(1/6)$ (a Φ jelölés nem kötelező, és a folytonosságra itt sem jár pont, mert az egészre összesen 1 pont jár, emiatt bármelyik lépésben szabad váltani a $\leq$ és a $<$ között)
(1 pont) $\approx \Phi(0{,}17)$
(1 pont) $\approx 0{,}5675$.
(Ne vonjunk le pontot, ha csak az a baj, hogy valamelyik $\approx$ helyett =-t ír. Az utolsó két lépés összevonható, ha előtte az 1/6 már megjelent ÉS jó a kiolvasott végeredmény.)
(b) (11 pont)
(2 pont) $\mathrm{cov}(X+2Y, X-4Y) = \underbrace{\mathrm{cov}(X,X)}_{=\mathbb{D}^2(X)} + 2\mathrm{cov}(X,Y) - 4\mathrm{cov}(X,Y) - 8\underbrace{\mathrm{cov}(Y,Y)}_{=\mathbb{D}^2(Y)}$.
(Ebből 1 pont, ha a bilinearitást jól használja, ehhez elég 4 helyes tagra bontani az összeget további egyszerűsítések nélkül. Még 1 pont, ha a konstans szorzókat is jól emeli ki, a szimmetriát jól használja és tudja, hogy egy val. változó önmagával vett kovarianciája a szórásnégyzete.
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$,
(1 pont) mert függetlenek.
(1 pont) Ezért (mivel a szórásnégyzet a normális eloszlás második paramétere – erre nem jár pont, mert benne van a nevezetes eloszlás táblázatban) $\mathrm{cov}(X+2Y, X-4Y) = 9 - 8\cdot 16 = -119$.
(Ha minden szükséges részeredmény szerepelt már, akkor itt elég a végeredmény.)
(0 pont) A korreláció meghatározásához most kiszámítjuk $X+2Y$ és $X-4Y$ szórásait is.
(1 pont) Mivel X és Y függetlenek,
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X+2Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(2Y)$
(1 pont) $= \mathbb{D}^2(X) + 4\,\mathbb{D}^2(Y) = 9 + 64 = 73$ (Ha a sor eleji lépés megvan, akkor ez a pont az előzővel összevonható, de ha a végeredmény nem jó, akkor csak az előző pont jár.
Ha pedig az előző lépés végéig megvannak a részeredmények és a végeredmény jó, akkor higgyük el, hogy így számol, de rossz végeredmény esetén ez az egy pont nem jár).
(0 pont) Hasonlóan (itt már nem muszáj a függetlenségre hivatkozni)
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X-4Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(-4Y)$
(1 pont) $= \mathbb{D}^2(X) + 16\,\mathbb{D}^2(Y) = 9 + 16\cdot 16 = 265$ (ha minden korábbi részletszámolás jó, akkor itt már elég a végeredmény).
(0 pont) arra, hogy a szórás a szórásnégyzet négyzetgyöke. Erre már a 2. (b)-ben adtunk pontot. Aki ott nem kapott rá pontot és itt leírta ezt, utólag kérhet a 2. feladatra 1 pontot.
(1 pont) Tehát $\mathrm{corr}(X+2Y, X-4Y) = \frac{\mathrm{cov}(X+2Y, X-4Y)}{\mathbb{D}(X+2Y)\,\mathbb{D}(X-4Y)} = \frac{-119}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{265}} \approx -0{,}8556$ (ha már minden részeredmény megvan, akkor a korreláció általános képlete után elég a numerikus végeredmény, akkor is OK, ha csak a szórásnégyzetek vannak meg és nem a szórások. Az általános képlet helyett pedig elég a konkrét esetbeli képlet, ha azonosítható a benne szereplő számok szerepe).
(c) (3 pont)
(1 pont) Független normálisok összege normális és a paraméterek összeadódnak. Normális lineáris transzformáltja normális (vagy konstans – ezt nem kell odaírni).
Ezekre összesen 1 pont jár. Ezek általános paraméterekkel is kifejezhetőek, de ez a pont csak akkor jár, ha hivatkozik a függetlenségre is. Ha nem írja le, hogy a paraméterek összeadódnak, de később összeadja őket, akkor ez a pont is jár. Ha nem hivatkozik a lineáris transzformációra,

de kimondja, hogy $2X$ normális eloszlású és minden más rendben van, akkor is adjuk meg ezt az 1 pontot.
(1 pont) Így $2X \sim \mathrm{N}(2; 36)$, mivel az eloszlás első paramétere $\mathbb{E}(2X) = 2\,\mathbb{E}(X) = 2$, a második $\mathbb{D}^2(2X) = 4\,\mathbb{D}^2(X) = 36$ és
(indoklás nélkül ez az 1 pont nem jár, de ha annyit odaír, hogy az első paraméter a várható érték és a második a szórás, és jó numerikus eredményt ad, akkor fogadjuk el ezért az 1 pontért a megoldást)
(1 pont) $2X + Y \sim \mathrm{N}(4; 52)$.
Az, hogy $2X$ milyen eloszlású, nem szükséges, amennyiben szerepel, hogy normális lineáris transzformáltja normális; ebben az esetben elég a $2X$ várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó indoklás (ami összevonható ugyanezzel a $2X + Y$-ra vonatkozóan, ha részletesen indokol).

5. Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 1 + x < y < 1 + 2x, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Mi Y értékkészlete? *Ehhez a részfeladathoz kivételesen nem kell indoklás, a többihez igen.*
(b) Határozzuk meg az $\mathbb{R} \to [0, \infty), y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényt minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $f_X(x) > 0$.
(c) Ez alapján határozzuk meg az $\mathbb{E}(Y|X)$ regressziót.
(d) Független-e X és Y?

Megoldás. (a)
(2 pont) $\mathrm{Ran}(Y) = (1, 5)$.
(Kisebb szintaktikai hibákért ne vonjunk le pontot, azért se, ha nyílt vagy félig nyílt intervallumot ír.)
(Indoklás nem kell, de a teljesség kedvéért ideírom: az együttes sűrűségfüggvény képletéből látható (X, Y) értékkészlete az $y = 1 + x$, $y = 1 + 2x$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek közé eső [tompaszögű] háromszög [és mivel itt konstans a sűrűségfüggvény és mindenhol máshol 0, ezért (X, Y) egyenletes eloszlású ezen a háromszögön]. Ebben a háromszögben a pontok Y koordinátája lehetséges értékeinek halmaza $(1, 5)$.)

(b) (7 pont)
(1 pont) Ha $f_X(x) > 0$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (ez OK az $f_X(x) > 0$ kitétel nélkül is).
(1 pont) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$,
(1 pont) ami $x \in (0, 2)$ esetén a következővel egyenlő: $= \int_{1+x}^{2+x} \frac{1}{2}\mathrm{d}y$
(1 pont) $= [\frac{y}{2}]_{y=1+x}^{1+2x}$
(1 pont) $= \frac{1+2x-(1+x)}{2} = \frac{x}{2}$ (elég a végeredmény, ha a jó primitív függény megvolt),
(1 pont) $x \notin (0, 2)$ esetén pedig 0-val egyenlő (mert a konstans 0 függvényt integráljuk y szerint, de ezt nem kell odaírni).
Úgy is jó, ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$-t csak az $f_X(x) > 0$ (avagy $x \in (0, 2)$) esetben írja oda és csak közli, hogy minden más esetben 0 a sűrűségfüggvény értéke, de az utóbbi 1 pontért annak ki kell derülnie a megoldásból (legalább impliciten), hogy pontosan a $(0, 2)$ az a halmaz, ahol a feltételes sűrűségfüggvényt a feladat szerint meg kell határozni. Indoklás nem kell arra ebben az esetben sem, hogy miért 0 az $f_X(x)$ értéke, ha $x \notin (0; 2)$.
(1 pont) Tehát $f_X(x) > 0$ esetén $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/2}{x/2} = \frac{1}{x}$ (ha minden részeredményt leírt már, akkor itt elég a végeredmény).
Ha észreveszi, hogy (X, Y) egyenletes eloszlású a háromszögön, akkor szabad a feltételes sűrűségfüggvény szemléletes jelentésével – és geometriai valószínűségi mezős számolással – érvelni. Ezt itt nem részletezzük.

(c) (7 pont)
1. (sztenderd) megoldás.
(1+1 pont) $\mathbb{E}(Y|X) = g(X)$, ahol $g(x) = \mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$ (1 pont a regressziós függvény x-beli értékének képletére, 1 pont pedig arra, hogy a regressziós függvény képletébe írva kapjuk a regressziót. Az $\mathbb{E}(Y|X)$ jelölésnek valahogy meg kell jelennie a megoldásban, mert ezt a regressziót kérdezzük a feladatban, de a g vagy az $\mathbb{E}(Y|X = x)$ jelölések lehet helyett lehet bármi más is, ami nem helytelen)
(1 pont) $= \int_{1+x}^{1+2x} \frac{1}{x} y\mathrm{d}y$ (az előző lépéssel összevonható)
(0 pont) $= \frac{1}{x} \int_{1+x}^{1+2x} y\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{1}{x}[y^2/2]_{y=1+x}^{y=1+2x}$
(1 pont) $= \frac{(1+2x)^2-(1+x)^2}{2x}$
(1 pont) $= \frac{(2+3x)x}{2x} = 1 + \frac{3}{2}x$ [két négyzet különbsége —- nem kell indoklás]
(avagy: az előző pontnál lévő kifejezés $= \frac{1+4x+4x^2-1-2x-x^2}{2x} = 3x^2 + 2x2x = 1 + \frac{3}{2}x$).
Ha kijön bármilyen helyes képlet a primitív függvény alapján, de nincs egyszerűsítve, akkor az utolsó pont nem jár, de addig OK.
Megjegyzés: Ez a képlet csak akkor érvényes, ha $f_X(x) > 0$, de ezt nem kell odaírni, mert a regresszió szempontjából az $f_X(x) = 0$ eset érdektelen (mert $\mathbb{E}(Y|X)$ csak egy valószínűséggel egyértelműen van definiálva). Ne vonjunk le még egy pontot, ha a (b)-ben már levontunk azért, mert nem mondja meg, hogy $f_X(x)$ mikor pozitív.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X) = 1 + \frac{3}{2}X$ (ha bonyolultabb formában megadott regressziós függvénybe helyettesíti X-et, az is OK).

2. (intuitívabb, kevesebb algebrai átalakítást, de cserébe némi ötletet és indoklást is igénylő) megoldás.
(3 pont) A feltételes sűrűségfüggvény fenti képletéből látható, hogy $x \in (0, 2)$ (avagy $f_X(x) > 0$) esetén $X = x$-et feltéve Y egyenletes eloszlású az $(1 + x, 1 + 2x)$ intervallumon. (A feltételes sűrűségfüggvény konstans ott, ahol nem 0 – de ezt nem kell jobban indokolni, mert az egyenletes eloszlás benne van a táblázatban. De a feltételes sűrűség- vagy eloszlásfüggvényre hivatkozni kell. Pontatlan megfogalmazás esetén lehet részpontot adni.)
(1 pont) Egyenletes eloszlás várható értéke a vonatkozó intervallum középpontja (képlettel is jó: $(a + b)/2$ az $\mathrm{U}(a; b)$ esetén),
(1 pont) ezért $\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{1+x+1+2x}{2} = 1 + \frac{3}{2}x := g(x)$.
(1 pont) arra, hogy $\mathbb{E}(Y|X) = g(X)$ (elég az egyik fajta jelölés, a g nem kötelező, és ha jó az $\mathbb{E}(Y|X = x)$, akkor utána elég $\mathbb{E}(Y|X)$-re a végeredményt megadni és akkor is jár ez a pont)
(1 pont) $= 1 + \frac{3}{2}X$.
2b. megoldás: mint a 2., de $X = x$ elhagyásával, közvetlenül X-re feltételezve.
Itt azt kell mondani, hogy ha X értékét ismerjük (és valahogy kiderül, akár a (b)-ből, hogy csak az az eset releváns, amikor a $(0, 2)$ intervallumba estik), akkor $Y \sim \mathrm{U}(1 + X; 1 + 2X)$. Erre már jár 4 pont, és utána 3 pont arra, hogy emiatt $\mathbb{E}(Y|X) = 1 + \frac{3}{2}X$, amiből 1 pont az indoklás (intervallum közepe/általános képlet stb.).

(d) (4 pont)
Annak a puszta közlésére, hogy nem függetlenek, nem jár pont. Teljesen rossz indoklással sem jár pont rá.
1. [ajánlott] megoldás.
(2 pont) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.
(1 pont) Tehát nem lehetnek függetlenek, mert ez itt nem teljesül,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja, pl.: $\mathbb{E}(Y)$ egy konstans, – az értékét nem kell kiszámolni – míg a kapott $\mathbb{E}(Y|X) = 1 + \frac{3}{2}X$ nem [egy valószínűséggel] konstans).
2. megoldás.
(2 pont) Ha X és Y függetlenek, akkor $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ minden olyan esetben, amikor $f_X(x) > 0$ (ha csak az utóbbi kitétel hiányzik, azért ne vonjunk le pontot, viszont arra nem le-

het hivatkozni, hogy azért nem függetlenek, mert $f_X(x) = 0$ esetén $f_{Y|X}(y|x)$ is nulla és emiatt nem egyezik meg $f_Y(y)$-nal).
(1 pont) Ez itt viszont nem teljesülhet,
(1 pont) mert... (valahogy megindokolja, pl.: $f_{Y|X}(y|x) = 1/x$ jól láthatóan függ x-től, nem kell túl részletes indoklás).
3. megoldás.
(4 pont) Kiszámolja $f_Y(y)$-t (x szerint integrálja az együttes sűrűségfüggvényt) és mutat egy olyan (x, y) párt, amelyre $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Ebben az esetben kell $f_Y(y)$ képlete, vagy legalább annyi számítás, ami megmutatja, hogy az egyenlőség nem teljesülhet.
4. megoldás.
(4 pont) A 3.-hoz hasonló, de sűrűségfüggvények helyett eloszlásfüggvényekkel: valamilyen (x, y) pontot mutat, amire $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y)$ (vagy a 2. megoldáshoz hasonlót csinál feltételes eloszlásfüggvénnyel). Ez lényegesen több számolást igényel, viszont nem feltétlenül a 3. megoldás szerint kapott sűrűségfüggvényeket kell integrálni, pl. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y)$ a folytonos TVT segítségével is megkapható, X-re való feltételezéssel, a már kiszámolt feltételes sűrűségfüggvénnyel. Továbbá geometriai valószínűségi mezős érveléssel egyszerűbben is megkapható (rajzoljuk fel az $\{Y < y\}$ eseményt).
5. megoldás.
(4 pont) Kiszámítja X és Y kovarianciáját és megállapítja, hogy az nem 0, ezért X és Y nem lehet független. Itt az ötletre max. 1 pont jár és max. még 1 pont a kovariancia képletére és $\mathbb{E}(XY)$ képletére folytonos esetben együtt, a többi ponthoz kell a számolás.

6. * Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású, $\mathrm{U}(-\vartheta; \vartheta)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol $\vartheta > 0$ egy ismeretlen paraméter.

   (a) Az $(X_1, \ldots, X_n)$ minta rögzített $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációja esetén határozzuk meg a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n)$ értékét.

   (b) Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést ϑ-ra.

Megoldás. Ez a példa nagyon hasonló a jegyzetkiegészítésben szereplő 14.2.10. Példához és a honlapon közzétett 2024.01.25-i vizsga 6-os feladatához.
(a) (7 pont)
(3+1 pont) (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai miatt) az f_ϑ sűrűségfüggvény

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\vartheta}, & \text{ha } x \in (-\vartheta, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}.$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, 1–1 a határokra, 1 pont a 2. sorra. Ha a $-\vartheta$ vagy a ϑ pontot a másik szakaszhoz sorolja, azért ne vonjunk le pontot, de ha nem sorolja be őket, akkor -1 pont Ha a ϑ konstans szorzója (2) rossz, de minden más jó, akkor csak 1 pontot vonunk le.)
(3 pont) Így a likelihood-függvény $(X_1, \ldots, X_n)$ bármely $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációja esetén

$$L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\vartheta} = \frac{1}{(2\vartheta)^n}.$$

Ebből 1 pont az első lépésre, 1 a másodikra és 1 a harmadikra, viszont jó végeredmény esetén az utóbbi kettő összevonható. Az is OK, ha valahol a (b)-ben írja át a produktumot hatvánnyá.
Megjegyzés: Nem muszáj odaírni, hogy ez a képlet akkor érvényes, ha minden x_i a $(-\vartheta, \vartheta)$ intervallumban van, mivel ez a realizáció definíciójából következik. (Fentebb az f_ϑ sűrűségfüggvénynél viszont fontos, hogy az $\frac{1}{2\vartheta}$ képlet csak a $(-\vartheta, \vartheta)$ intervallumon érvényes.)
(b) (13 pont)
(3 pont) Az intervallum hosszát mindaddig csökkenthetjük (és ezzel a likelihood-függvényt növelhetjük), amíg az $(x_1, \ldots, x_n)$ az $(X_1, \ldots, X_n)$ egy realizációja marad

(arra az ötletre, hogy az intervallum hossza legyen minimális, még ha nem is világos, hogy milyen értelemben és hogyan kell ezt elérni, már lehet adni 1 pontot. A realizáció tulajdonság említése helyett jó az is, hogy „amíg az összes x_i a $(-\vartheta;\vartheta)$ intervallumban marad”),
(2 pont) azaz amíg

$$x_n^* = \max\{x_1,\dots,x_n\} < \vartheta$$

(Elég a maximumos és x_n^* jelölések közül az egyik. Itt az egyszerűség kedvéért a legvégéig a rendezett mintás jelölést használjuk, de végig jó a maximumos értelemszerűen. Ha $\leq$-vel írja, az nem baj, hasonlóan a későbbiekben is.)
(2 pont) ÉS

$$x_1^* = \min\{x_1,\dots,x_n\} > -\vartheta.$$

Ha nem világos a megoldásból az „ÉS” kapcsolat, akkor az utóbbi 4 pontból max. 2 jár, kivéve ha a megoldás későbbi része tisztázni tudja, hogy a hallgató „ÉS”-re gondolt.
(2 pont) Így a likelihood-függvény éppen a határesetben lesz maximális, amikor vagy x_n^*, vagy $-x_1^*$ egyezik meg ϑ-val,
(1 pont) úgy, hogy a kettő közül a másik a $(-\vartheta,\vartheta)$ intervallum belsejébe essen (vagy szintén pont a határra, ami 0 valószínűséggel fordul elő, ezért nem kell megemlíteni),
(1 pont) vagyis ha $\vartheta = \max\{-x_1^*, x_n^*\}$. (Szövegesen is jó.)
Ha megvan a jó végeredmény, akkor az utóbbi 4 pontból jár minimum 3 pont akár indoklás nélkül is, és csak azt kell indokolni, hogy a likelihood-függvény a vizsgált határesetben lesz maximális és ezért ezt az esetet választjuk.
(1 pont) Ezért az $(x_1,\dots,x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslésünk

$$\vartheta_*(x_1,\dots,x_n) = \max\{x_n^*, -x_1^*\} = \max\{\max\{x_1,\dots,x_n\}, -\min\{x_1,\dots,x_n\}\}$$

(elég az egyik fajta jelölés; ártatlanabb szintaktikai hibáért ne vonjunk le pontot, csak súlyosabbért),
(1 pont) a maximum likelihood becslésünk pedig

$$\vartheta_*(X_1,\dots,X_n) = \max\{X_n^*, -X_1^*\} = \max\{\max\{X_1,\dots,X_n\}, -\min\{X_1,\dots,X_n\}\}.$$

Megjegyzés: $-x_1^*$ helyett végig lehet $|x_1^*|$-ot írni. Ugyanis bár előfordulhat, hogy x_1^* pozitív, de ilyen esetben az összes x_i pozitív és $x_n^* > x_1^* = |x_1^*| > -x_1^*$, így $\max\{|x_1^*|, x_n^*\} = \max\{-x_1^*, x_n^*\} = x_n^*$, különben pedig $-x_1^* = |x_1^*|$, vagyis bár $-x_1^*$ nem ugyanaz a statisztika, mint $|x_1^*|$, de a kapott ML-becslés minden realizáció esetén ugyanaz a két esetben. Ugyanígy végiggondolható, hogy ha x_n^* helyett $|x_n^*|$-ot írunk, az nem változtat az ML-becslésen, mert ha $x_n^* < 0$, akkor az összes x_i negatív és $-x_1^* = |x_1^*| > |x_n^*| > x_n^*$, ezért $\max\{-x_1^*, x_n^*\}$ és a $\max\{-x_1^*, |x_n^*|\}$ képlet is $-x_1^*$-ot adja. Ezeket a maximális pontszámért nem kell végiggondolni. Elfajuló eset, amikor minden mintaelem 0, de ez 0 valószínűséggel fordul elő, akármi is $\vartheta > 0$, ezért ezzel nem kell foglalkozni (és a kapott végeredmény ilyenkor is jó, csak a $(-\vartheta;\vartheta)$ intervallum hosszát 0-val becsüljük).

További megjegyzések a javításhoz:

- Ha a maximumot összekeveri a minimummal vagy az előjeleket rontja el, de konzisztensen csinálja, akkor összesen 3–3 pont levonás.
- Ha arra hivatkozik, hogy ez ugyanaz, mint a jegyzetkiegészítésbeli példa, és ebből kihozza $-x_1^*$-ot végeredménynek, akkor max. 4 pont. Ha arra, hogy ez ugyanaz, mint a tavalyi vizsgapélda és ebből kihozza x_n^*-ot végeredménynek, akkor max. 3 pont (vizsgafeladatra nem szabad hivatkozni).
- Ha a b)-ben log-likelihood-függvényes módszerrel próbálkozik, a log-likelihood-függvény helyes levezetéséért 2 pont jár, ϑ szerinti parciális deriválására 2 pont. Annak megállapítására, hogy a deriváltnak sehol nincs zérushelye ott, ahol $(x_1,\dots,x_n)$ realizáció, jár 2 pont. Ez a 6 pont akkor is jár, ha nem vesz logaritmust, hanem az eredeti likelihood-függvényt deriválja (4 pont) és megállapítja, hogy nincs zérushely (2 pont). Annak megállapítására, hogy emiatt meg kell nézni a határokat, jár 1 pont. Ezután attól a ponttól kezdve, ahol rá kell jönni, hogy vagy x_n^*-nak, vagy $-x_1^*$-nak kell megegyeznie ϑ-val, pontozás a fenti mintamegoldáshoz hasonlóan.