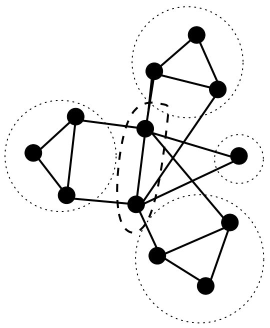
Bevezetés a számításelméletbe II.

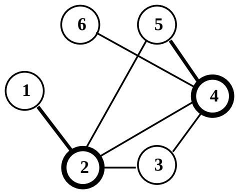
MEGOLDÁSOK

3. gyakorlat: Független és lefogó pontok, élek

1. Nincs benne teljes párosítás, mert sérül a Tutte-feltétel: a két középső pontot elhagyva a gráf 3 háromszögre és egy izolált pontra, (vagyis 4 páratlan komponensre) esik szét.



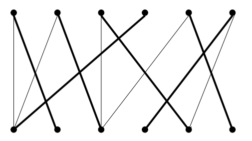
2. Ismerjük fel, hogy az egyes kérdések pontosan a tanult „görög betűkre” kérdeznek rá. Sorrendben a ρ, ν, τ és α értékekre.
   A megoldáshoz találunk egy F_e független élhalmazt, és egy ugyanilyen elemszámú lefogó ponthalmazt: L_p, és a $|F_e| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |L_p|$ egyenlőtlenségből adódik, hogy így a ν-t és a τ-t is meg tudjuk határozni.



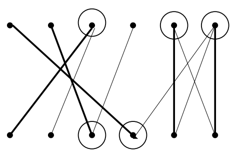
   Az $(1, 2), (4, 5)$ élek függetlenek, és a $\{2, 4\}$ egy lefogó ponthalmaz, tehát adódik, hogy $\nu(G) = \tau(G) = 2$ és ebből a Gallai tételek alapján: $\nu(G) = 2 \rightarrow \rho(G) = 4$ és $\tau(G) = 2 \rightarrow \alpha(G) = 4$.

3. Megint a $|F_e| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |L_p|$ egyenlőtlenséget használjuk az a, b, c, páros gráfoknál. Ebből $\nu(G)$-re sorrendben 6,5,4 adódik. A többi paraméter pedig már egyszerűen számolható, hiszen a gráfok párosak voltak.

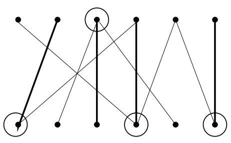
(a)



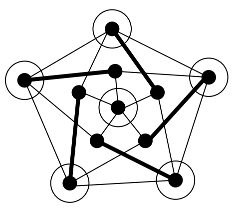
(b)



(c)

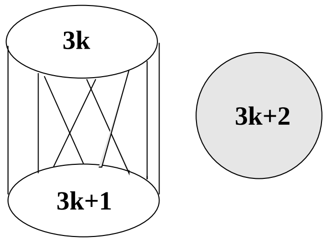


(d)



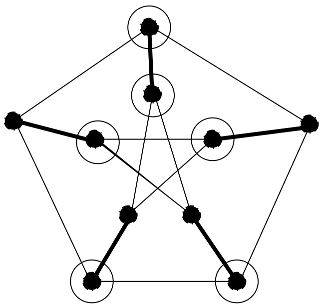
   A d) feladat picit nehezebb. Először határozzuk meg $\nu(G)$-t! Ez kisebb, vagy egyenlő kell legyen 5-nél, hiszen 11 pont felének alsó-egészrészénél sohasem lehet több független élet találni. Viszont 5 független él van a gráfban, ezért $\nu(G) = 5$. Ebből adódik, hogy $\rho(G) = 6$.
   Most lássuk be, hogy $\tau(G) = 6$! Ehhez egyrészt meg kell mutatnunk, hogy ennél kevesebb nem lehet, másrészt mutatnunk kell egy 6 pontból álló lefogó ponthalmazt. A gráf középső csillagának éleit le kell fogni. Ha ezt a csillag közepéből akarjuk lefogni, akkor az imént bejelölt 5 független él lefogásához biztosan kell még legalább 5 pont. Ha viszont a csillag-élek végpontjait vennénk, akkor a külső ötszög egyetlen éle sem lenne még lefogva. Ezért 6 pont legalább kell az élek lefogásához. Az ábrán bekarikázott 6 pont viszont mutatja az elégségességet.

4. (a) Egy teljes páros gráfnál a független pontok maximális száma mindig a nagyobbik halmaz elemszáma, ebben az esetben $\nu(G) = 3$. Innen már adódik, hogy a többi érték is 3.
   (b) A teljes gráfokban legfeljebb 1 pont lehet független, így $\alpha(G) = 1$ és $\tau(G) = 4$. 5 pont esetén $\nu \leq 2$, és két független élet tudunk is találni, így $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 3$.
   (c) Ebben a feladatban három részre tudjuk osztani a pontok halmazát aszerint, hogy az indexük mennyit ad maradékul 3-mal osztva. A $3k$ és $3k + 1$ alakú indexszel rendelkező pontok egy teljes páros gráfot adnak, (vagyis a két elemhalmaz között az összes él be lesz húzva, a halmazokon belül pedig egy sem). A $3k + 2$ alakú indexszel rendelkező pontok pedig egy teljes gráfot adnak, hiszen bármely két ilyen alakú szám összege $3k + 1$ alakú. Ezt a halmazt viszont már nem köti össze él a másik kettővel.

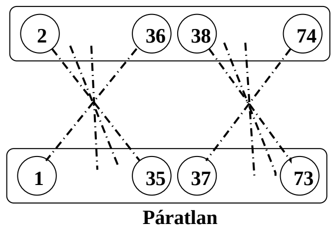


   A gráf ponthalmazait külön-külön vizsgálva adódik, hogy a független pontok maximális száma=668+1, ugyanis az első két halmaz valamelyikéhez legfeljebb 1 pontot vehetünk hozzá a harmadik halmazból. Ebből $\tau(G) = 1335$ adódik. Egy maximális elemszámú független élhalmaz az első két halmaz egy teljes párosítása, és egy teljes párosítás a harmadik halmaz teljes gráfjában (ez tehát egy teljes párosítás G-ben, ennél több független él nem lehet.) Ezért $\nu(G) = \rho(G) = 1002$.

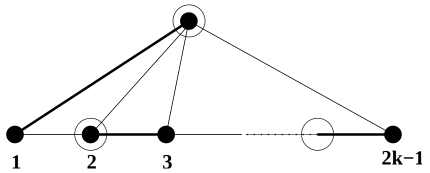
(d) A Petersen-gráfban létezik egy teljes párosítás, így $\nu(G) = \rho(G) = 5$. Ha a külső és a belső 5-hosszú kört vesszük, akkor ezek lefogásához legalább 3-3 pontra szükségünk van. 6 pont viszont elég is, ezért $\tau(G) = 6$ és $\alpha(G) = 4$.



5. $74 = 2 \cdot 37$, ezért két páratlan indexű és két páros indexű pont nem lehet összekötve a gráfban, hiszen indexeik összege páros volna, ami nem relatív prim a 74-hez. Tehát a kapott gráf páros, az egyik halmazát a páratlan indexű pontok, a másik halmazát a páros indexű pontok alkotják. A teljes páros gráfból viszont még hiányzik néhány él, pontosan azok, melynek végpontjainak indexének összege osztható 37-el, (tehát vagy 37, vagy 111, hiszen a 74 össszegűeket már elhagytuk). Ez az elhagyott élhalmaz pontosan egy teljes párosítás volt a gráfban, így ami maradt az egy reguláris páros gráf. Ebben viszont a 2. feladatsor 9. feladata értelmében létezik egy teljes párosítás, vagyis $\nu(G) = 37$. Mivel a gráf páros, adódik, hogy az összes többi érték is 37 lesz.



6. A $|F_e| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |L_p|$ egyenlőtlenségből, és az $n = |F_e| = |L_p| = n$ egyenlőségből mutatjuk meg, hogy mindegyik paraméter értéke n lesz. Tehát találnunk kell egy n élből álló független élhalmazt (vagyis egy teljes párosítást) és egy n pontú lefogó halmazt. A Hamilton-kör minden második éle jó lesz teljes párosításnak, lefogó ponthalmaznak pedig c pontból indulva a Hamilton-kör minden második pontja fog megfelelni.



7. Egy teljes gráfban a lefogó pontok száma $n-1$ kell legyen, hiszen ennél kevesebb pont esetén maradna olyan él, amelyik egyik végpontja sincs benne a lefogó élhalmazban. Ha viszont létezik két olyan u és v pont, melyek nincsenek összekötve a gráfban, akkor a többi $n-2$ pont már egy lefogó ponthalmaz lehetne.

8. Legyen $F_e max$ egy olyan független élhalmaz, amelyhez már nem tudunk úgy hozzávenni élet a gráf éleiből, hogy az élhalmaz független maradjon. (Egy ilyen halmazt nevezünk tartalmazásra nézve maximális halmaznak. Világos, hogy ennek elemszáma lehet kisebb mint az elemszámra nézve maximális független élhalmazé, vagyis $|F_e max| \leq \nu(G)$.) Megmutatjuk, hogy ha egy ilyen $F_e max$ élhalmaz végpontjait vesszük, akkor ezek a pontok egy lefogó ponthalmazt adnak. Ugyanis, ha maradt volna olyan él, melyet ezek a végpontok nem fognak le, akkor ezt az élet hozzá tudtuk volna venni $F_e max$-hoz is. Ebből adódik, hogy: $\tau(G) \leq 2|F_e max| \leq 2\nu(G)$. A legegyszerűbb példa az egyenlőség teljesülésére egy háromszög.

9. Egy teljes páros gráfot véve világos, hogy a független pontok maximális száma megegyezik a nagyobbik halmaz elemszámával, a lefogó pontok minimális száma pedig a kisebbik halmaz elemszámával. Az élek száma pontosan a teljes páros gráfot alkotó két halmaz elemszámainak szorzata.

10. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_{\tau(G)}$ a minimális számú lefogó pontok halmaza, és $d(v)$ egy v pont fokszáma. Definíció szerint $d(v_i) \leq \Delta(G)$, és mivel a gráf minden élének legalább az egyik végén található lefogó pont, így adódik, hogy $|E(G)| \leq d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{\tau(G)}) \leq \Delta(G) \cdot \tau(G)$.

11. Minden G gráfra igaz, hogy véve egy tetszőleges F_p független ponthalmazt és egy tetszőleges T teljes részgráfot, ezek metszete legfeljebb egy pont lehet. Ebből az következik, hogy a maximális független ponthalmaz és a maximális klikk is legfeljebb egy közös pontot tartalmazhat, tehát igaz az egyenlőtlenség.

12. Azt kell először felismernünk, hogy egy maximális független halmaz G-ben egy maximális teljes részgráf (maximális klikk) lesz G komplementerében. Ha G egy síkgráf komplementere, akkor $\alpha(G) \leq 4$, ugyanis G komplementerében nem lehet K_5, vagyis 5 pontú teljes gráf. Ezért a Gallai-tételből adódik, hogy: $\tau(G) = n - \alpha(G) \geq 96$.