Bevezetés a számításelméletbe II.

2004. ÁPRILIS 22-23.

11. gyakorlat: Algebrai alapfogalmak

1. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?
   (a) {egész számok, összeadás},
   (b) {páros számok, összeadás},
   (c) {2×2-es mátrixok, mátrixszorzás},
   (d) {n-edik komplex egységgyökök, szorzás},
2. Írjuk fel az alábbi csoportok Cayley-táblázatát:
   (a) {mod 3 maradékosztályok, összeadás}
   (b) {mod 8 redukált maradékosztályok, szorzás}
3. Írjuk át a következő két permutációt ciklikus alakra, majd számítsuk ki a szorzatukat! Mi a kapott permutáció fixpontja?
   $$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
4. Mutassunk példát nemkommutatív csoportra!
5. Legyen G csoport. Bizonyítandó, hogy $aG = G$, továbbá, hogy bármelyik elem előáll két másik szorzataként!
6. $a^2 = 1 \quad \forall a \in G$-re $\Longrightarrow G$ – Abel-csoport.
7. Mi az egyes elemek rendje C_{12}-ben (a 12 rendű ciklikus csoportban)?
8. **ZH!** Legyen a G csoport elemeinek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a művelet a mod 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus!
9. **ZH!** Izomorf-e a mod 8 redukált maradékosztályok multiplikatív csoportja a mod 4 maradékosztályok additív csoportjával?
10. $|G| = 81$ és $\exists a \in G : \quad a^{27} \neq 1 \Longrightarrow$ a csoport kommutatív.
11. Jelölje a és b egy csoport két tetszőleges elemét. Bizonyítsuk be, hogy b rendje megegyezik $a^{-1}ba$ rendjével!
12. Mely csoportokra igaz, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?
13. Az n-ed rendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemeket összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?
14. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot (G), ahol a művelet az összeadás. Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{a \in G} a = 0$.
15. **ZH!** Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $\oplus$ a bitenkénti modulo 2 összeadást. Álljon H_2 azokból a sorozatokból, melyekben az egyesek száma kettővel osztható. H_3 pedig azokból, melyekben az egyesek száma osztható hárommal. Az előbb definiált művelettel csoportot alkot-e H_2? Csoport-e H_3?
16. **ZH!** Bizonyítsuk be, hogy egy csoport nem állhat elő két valódi részcsoportjának uniójaként.
17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje ugyanaz, akkor ez a rend prímszám!
18. **ZH!** Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden $a \in G$ elemére teljesül, hogy az a és az a^8 elemek rendje azonos.
19. Csoportot illetve félcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?
   (a) H az egész számok halmaza és az a, $b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
   (b) Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod m$;
   (c) H az egész számok halmaza és $a, b \in H$ számokra $a * b = a^b$;
   (d) **ZH!** H azon f függvények halmaza, melyek $f(x) = cx + d$ alakúak, ahol $c \neq 0$. A $*$ művelet pedig a függvények egymás után való alkalmazása (kompozíció, jelölése analízisben $f \circ g$);
   (e) **ZH!** H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
   (f) H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.
20. Vegyük a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ számokat a $\pmod{12}$ összeadásra nézve. Normálosztója-e ennek a csoportnak a 4-el osztható számok halmaza? Ha igen, akkor mik a velük képzett faktorcsoportok?
21. Mik lehetnek a C_{12} ciklikus csoport normálosztói? Mik a velük képzett faktorcsoportok?