

**Osztozkodási játék.** Adott  $n \in \mathbb{N}_+$  játékos, akik a  $[0, 1)$  intervallumot akarják elosztani egymás között. Az  $i$ . játékos az  $A_i$  részt kapja, ahol az  $A_i$  véges sok, páronként diszjunkt, balról zárt, jobbról nyílt intervallumból áll. Az  $(A_1, \dots, A_n)$  elosztásban az egyes  $A_i$ -k páronként diszjunktak és az uniójuk kiadja a  $[0, 1)$ -et.

**Értékelő eloszlásfüggvény.** Az  $i$ . játékos  $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  értékelő eloszlásfüggvénye monoton növekvő, továbbá  $f_i(0) = 0$  és  $f_i(1) = 1$ .

**Értékelő függvény.** Az  $i$ . játékos értékelő függvénye  $\mu_i$ , amire  $\mu_i([a, b)) = f_i(b) - f_i(a)$ , továbbá additív, azaz páronként diszjunkt intervallumok uniójára az intervallumok értékének az összegét adja.

**Műveletek.** A protokollok a **vág** és a **mér** műveleteket használják, ahol a  $\text{mér}_i(x)$  az  $f_i(x)$  értékét adja vissza, a  $\text{vág}_i(y)$  pedig a  $\min\{x \mid f_i(x) = y\}$ -t.

**Arányos elosztás.** Az  $(A_1, \dots, A_n)$  elosztás arányos, ha minden  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén  $\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}$ .

**Oszt és választ protokoll.** Két játékos esetén az egyik játékos a saját értékelő függvénye szerint két egyenlő részre osztja a  $[0, 1)$ -et, majd a másik játékos választ ezek közül egy, a saját értékelő függvénye szerinti legjobbat.

**Fink-eljárás.** Online protokoll. Első körben az 1. játékos megkapja a teljes  $[0, 1)$ -et. Az  $i$ . körben az  $i$ . játékos megérkezik és az  $1, \dots, (i-1)$  játékosok mindegyike  $i$  darab egyenlő részre osztja a saját részét. Az  $i$ . játékos mindenkitől egy, a saját értékelő függvénye szerinti legjobb részt elvesz.

**Tasnádi-eljárás.** Rekurzív protokoll. Az első játékos a saját értékelő függvénye szerint  $n$  egyforma részre osztja az elosztandó halmazt, és mind az  $n$  részhez előkészít  $n-1$  darab jegyet. A többi játékos mindegyike elvesz  $n-1$  darab különböző jegyet, kihagyva a saját értékelő függvénye szerinti egyik legrosszabbat. A fennmaradó  $n-1$  darab jegyet az első játékos kapja. Ezután az  $n$  rész mindegyikén  $n-1$  játékos osztozkodik tovább a Tasnádi-eljárással, ebben az első játékos megfelelő multiplicitással vesz részt.

**Diszkrét mozgó késes eljárás.** Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerint azt a legkisebb  $[0, x)$  intervallumot, ami neki  $\frac{1}{n}$ -et ér. A legbaloldalibb jelölővel rendelkező játékos megkapja a kért szeletét, a többi játékos a megmaradt intervallumon folytatja az eljárást.

**Even–Paz-eljárás.** Oszd meg és uralkodj elvű protokoll. Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerinti  $\lfloor n/2 \rfloor : \lceil n/2 \rceil$  vágópontot. A játékosokat a jelölőik szerinti növekvő sorrendbe rendezzük (az egyenlőséget véletlenszerűen feloldva) és az első  $\lfloor n/2 \rfloor$  játékost balra, a maradék  $\lceil n/2 \rceil$  játékost pedig jobbra küldjük. Az intervallumot a balra küldött játékosok maximális jelölőjénél vágjuk, a bal oldali részen a balra küldött játékosok, a jobb oldalin pedig a jobbra küldöttek osztozkodnak tovább, szintén az Even–Paz-eljárással.

**Irigységmentes elosztás.** Az  $(A_1, \dots, A_n)$  elosztás irigységmentes, ha minden  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  esetén  $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$ .

**Selfridge–Conway eljárás.** Irigységmentes elosztás három játékosra  $(A, B, C)$ . Az  $A$  harmadol, a  $B$  a darabokat sorrendezi és ha van legnagyobb akkor azon igazít: levág belőle annyit, hogy ugyanakkora legyen mint a következő. A levágott maradékot félreteszik. A három fő darabból  $C, B, A$  sorrendben választanak egyet-egyet, de  $B$ -t megkérjük, hogy ha teheti, akkor az igazítottat előzőkenyen ő vigye el (neki ez egy legjobb szelet), ne maradjon az  $A$ -ra. Ha  $C$  viszi el az igazítottat, akkor a maradékot  $B$  harmadolja és  $C, A, B$  sorrendben osztoznak. Egyébként a  $B$  viszi el az igazítottat, ekkor a maradékot a  $C$  harmadolja és azokon  $B, A, C$  sorrendben osztoznak.

Az  $A$  biztosan nem lesz irigy az igazított darabot kapóra, hiszen  $A$  már az első körben kapott annyit, mint amennyit az igazított és a teljes maradék ér neki. A másikra sem lesz irigy, hiszen az első körben az  $A$  osztott, tehát egyformákat vittek el, a második körben pedig az  $A$  hamarabb választhatott.  $B$  és  $C$  sem lehetnek irigyek senkire, hiszen az első körben  $C$  választ először, de a  $B$  is legalább olyan jól jár a saját szemszögéből, a második körben pedig az egyikőjük az osztó volt, a másikójuk pedig az elsőnek választó.

1. Három játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon a Fink-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$$

Tudjuk, hogy a második játékos megérkezése után az első a  $[0, \frac{1}{4})$ , a második pedig az  $[\frac{1}{4}, 1)$  intervallumot birtokolja. Mondjuk meg, hogy a harmadik játékos körében mit csinál az algoritmus a  $[0, \frac{1}{4})$  intervallumon!

2. Három játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon a Fink-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1, & \text{ha } 1/4 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^3$$

Legyen a legjobboldalabbi kiosztott intervallum az  $[a, 1)$ . Mennyi az  $a$  értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

3. Három játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon a Tasnádi-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$\text{a) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ (3x-1)/2, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/4, \\ (2x+1)/3, & \text{ha } 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^4$$

Hajtsuk végre a rekurzív algoritmus legkülső függvényhívását: a belső rekurzív hívásokat ne hajtsuk végre, csak adjuk meg milyen paraméterekkel hívja őket a külső hívás.

4. Három játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon a diszkrét mozgó késes eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$\text{a) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^4$$

$$\text{b) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sqrt{x}$$

Legyen a legbaloldalabbi kiosztott intervallum a  $[0, b)$ . Mennyi a  $b$  értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

5. Öt játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon az Even-Paz eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad f_4(x) = x^4, \quad f_5(x) = \min(2x, 1)$$

Hajtsuk végre a rekurzív algoritmus legkülső függvényhívását: a belső rekurzív hívásokat ne hajtsuk végre, csak adjuk meg milyen paraméterekkel hívja őket a külső hívás.

6. Öt játékos osztzkodik a  $[0, 1)$  intervallumon az Even-Paz eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \sqrt[5]{x}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x$$

Legyen a legbaloldalabbi kiosztott intervallum a  $[0, c)$ . Mennyi a  $c$  értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

7. Határozzuk meg a  $[0, 1[$  intervallum egy irigységmentes elosztását a Selfridge–Conway-eljárással, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_A(x) = \sqrt{x}, \quad f_B(x) = \min(2x, 1), \quad f_C(x) = x^2$$

8. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az  $n$  játékos nem egyenlő mértékben akar osztzni a  $[0, 1)$  intervallumon, hanem minden  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén az  $i$ -edik játékoshoz adott egy  $d_i \in \mathbb{Z}_+$  követelés, és olyan  $(A_1, \dots, A_n)$  elosztást keresünk, melyre tetszőleges  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén  $\mu_i(A_i) \geq d_i/D$  teljesül, ahol  $D := \sum_{i=1}^n d_i$ .

9. **ZH 2024, \*-os feladat** A  $[0, 1)$  intervallumon szeretne irigységmentesen osztzkodni  $n$  játékos (ahol  $n$  tetszőleges pozitív egész szám). Tudjuk, hogy az első  $n-1$  játékos értékelő eloszlásfüggvénye azonos, azaz  $f_1 = \dots = f_{n-1}$ , az  $n$ -edik játékosról viszont nem tudunk semmit. Javasoljunk hatékony algoritmust a feladat megoldására, és határozzuk meg az eljárás végrehajtásához szükséges mérés- és vágás műveletek számát.

10. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az  $n$  játékos úgy akar osztzni a  $[0, 1)$  intervallumon, hogy tetszőleges  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén  $\mu_i(A_i) \leq 1/n$  teljesüljön (azaz például torta helyett házimunkán osztznak a játékosok).

11. Vegyük az osztzkodási játék diszkrét változatát:  $n \in \mathbb{N}_+$  darab játékos osztzik a  $[0, 1)$  intervallumon oly módon, hogy  $k$  darab, előre megadott  $0 < p_1 < \dots < p_k < 1$  osztópontban vághatnak, ahol  $n-1 \leq k$ . Lássuk be, hogy ebben a játékban annak az eldöntése, hogy létezik-e arányos elosztás egy NP-teljes feladat.