Gráfok és algoritmusok

2. előadás, stabil párosítások

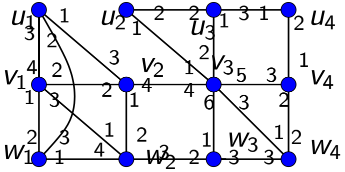
2024. február 22.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás

Egy, a gyakorlatban jól alkalmazható gráfmodell párosításait vizsgáljuk a továbbiakban.

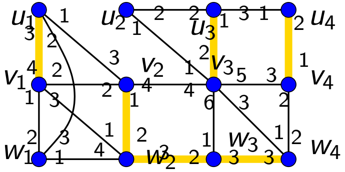
Élpreferenciák, dominálás, stabilitás

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

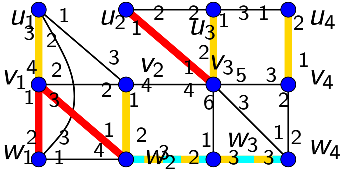
Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az $\mathbf{M} \subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

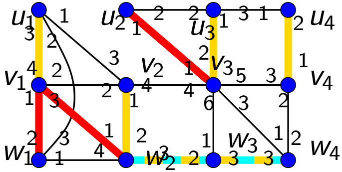
Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az **M** $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás

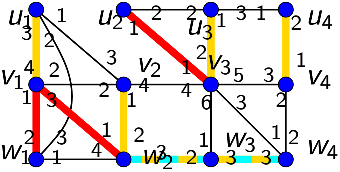


Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az M $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



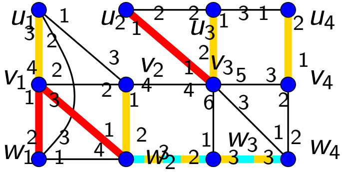
Tfh a $G=(V,E)$ gráf minden $v\in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e\in E$ élt, ha van olyan $v\in V$ csúcs és $m\in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e\notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E\setminus M$.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

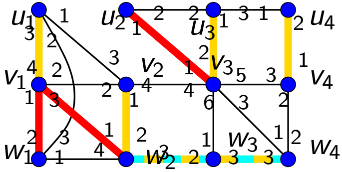
Def: Az M $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az M $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

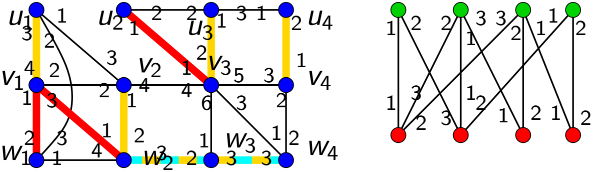
Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

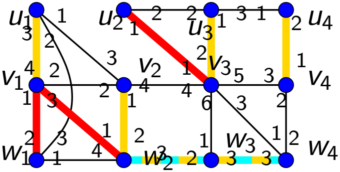
Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

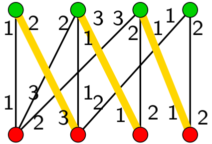
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás





Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az **M** $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

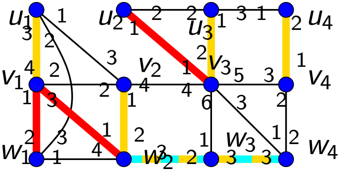
Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

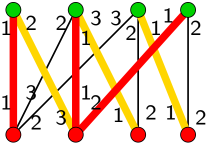
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás





Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az **M** $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

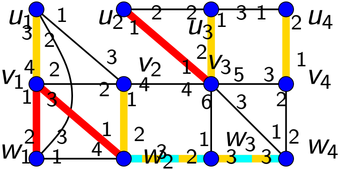
Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

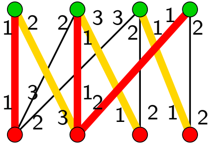
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

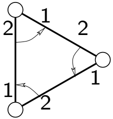
(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás







Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az **M** $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

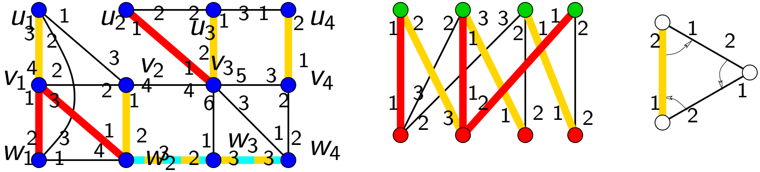
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Megf: Ciklikus preferenciák mellett C_3-nak nincs stabil párosítása.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás



Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M domináltа élek halmaza $E \setminus M$.

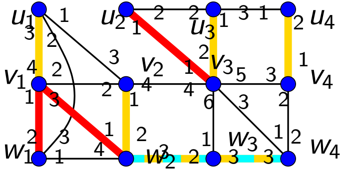
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

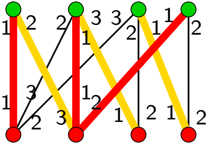
(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

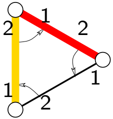
Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Megf: Ciklikus preferenciák mellett C_3-nak nincs stabil párosítása.

Élpreferenciák, dominálás, stabilitás







Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott egy $\preceq_v$ lineáris (preferencia) rendezés $E(v)$-n.

Def: Az **M** $\subseteq E$ élhalmaz **dominálja** az $e \in E$ élt, ha van olyan $v \in V$ csúcs és $m \in M$ él, amire $m \prec_v e$. (Azaz $m \preceq_v e \neq m$.)

Def: Ha $e \notin M$ és M nem dominálja e-t, akkor e **blokkolja** M-et.

Def: M **stabil párosítás**, ha az M dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

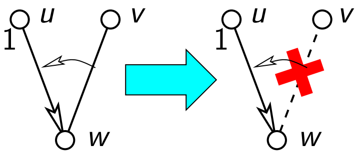
Megf: (1) Ha M stabil párosítás, akkor M nem dominál M-beli élt, ezért M párosítás. Tehát a stabil párosítás olyan párosítás, ami G minden más élét dominálja.

(2) Egy M párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se blokkolja.

Példa: Tfh G csúcsai fiúk ill. lányok, élei a lehetséges házasságok, a rendezés szimpátia szerinti. Mi ilyenkor a párosítás/blokkoló él?

Megf: Ciklikus preferenciák mellett C_3-nak nincs stabil párosítása.

Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).

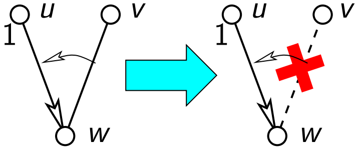
Megj: (1) Az éltörlési lemma azt mondja ki, hogy bizonyos éleket „ingyen" törölhetünk, mert ettől a stabil párosítások halmaza nem változik. A lemma óriási előnye, hogy rekurzívan alkalmazható: egy él lemma szerinti törlése után újabb élek válhatnak ingyen törölhetővé. Az éltörlési lemma ismételt alkalmazása sokat segíthet a stabil párosítások megkeresésében.

(2) A lemmában szereplő uw él az u csúcs **legjobb él**e.

Legrosszabb él: egy csúcs preferenciasorrendjében utolsó él.

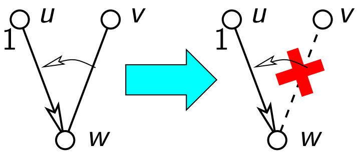
Konvenció: Minden csúcs legjobb élét a csúcsból kifelé irányítjuk.

Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).

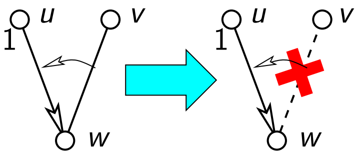
Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).

Biz: $\Rightarrow$: Tfh M stabil G-ben. Ekkor vagy $uw \in M$ vagy uw-t egy M-beli él w-nél dominálja. Ezért $vw \notin M$, így M $(G - vw)$-ben is párosítás, és mivel M minden más élt dominál, egyúttal stabil is.

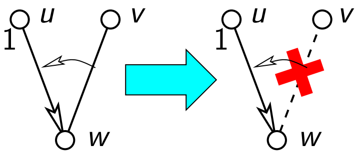
Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).

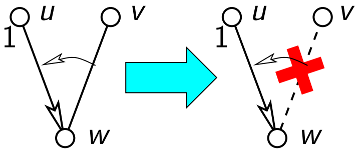
Biz: $\Rightarrow$: Tfh M stabil G-ben. Ekkor vagy $uw \in M$ vagy uw-t egy M-beli él w-nél dominálja. Ezért $vw \notin M$, így M $(G - vw)$-ben is párosítás, és mivel M minden más élt dominál, egyúttal stabil is.
$\Leftarrow$: Tfh M stabil $(G - vw)$-ben. Azt kell igazolni, hogy M vw-t is dominálja. Ha $uw \in M$, akkor $uw \prec_w vw$ miatt ez világos, ha viszont $uw \notin M$, akkor van olyan $f \in M$, amire (mivel $f \prec_u uw$ nem lehet) $f \prec_w uw \prec_2 vw$ teljesül. $\square$

Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$

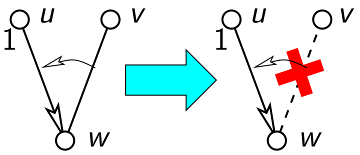
Egy hasznos megfigyelés



Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$

Köv: Tfh $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés. Ekkor $\forall e = uv \in E(\widehat{G})$: ($e$ $\prec_u$-legjobb) $\iff$ (e $\prec_v$-legrosszabb).

Egy hasznos megfigyelés

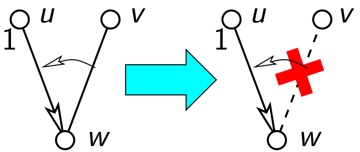


Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). □

Köv: Tfh $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés. Ekkor $\forall e = uv \in E(\widehat{G})$: ($e \prec_u$-legjobb) $\iff$ ($e \prec_v$-legrosszabb).

Biz: Ha $e \prec_u$-legjobb és nem $\prec_v$-legrosszabb, akkor lehetne még élt törölni. Ha $e \prec_v$-legrosszabb, akkor v-ből elindulva és legjobb éleket követve előbb-utóbb olyan csúcsba érkezünk (egy legrosszabb él mentén), ahol már jártunk. Ez a csúcs csak v lehet, ezért az e él mentén érkezünk meg. □

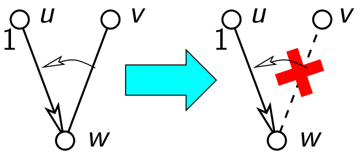
Egy hasznos megfigyelés

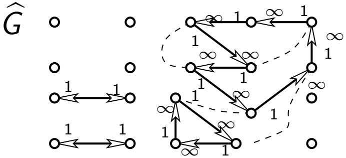


Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). □

Köv: Tfh $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés. Ekkor $\forall e = uv \in E(\widehat{G})$: ($e$ $\prec_u$-legjobb) $\iff$ (e $\prec_v$-legrosszabb). □

Egy hasznos megfigyelés





Éltörlési lemma: Ha uw a $\prec_u$-legjobb él és $uw \prec_w vw$ akkor (M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$

Köv: Tfh $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés. Ekkor $\forall e = uv \in E(\widehat{G})$: ($e$ $\prec_u$-legjobb) $\iff$ (e $\prec_v$-legrosszabb). $\square$

Megf: A $\widehat{G}$ tetsz. u csúcsa vagy izolált (és egyetlen stabil párosítás se fedi), vagy egy ,,izolált él'' egy csúcsa (ez az él minden stabil párosításban szerepel), vagy egy irányított élek alkotta kör csúcsa.

A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.
Megj: A tételben szereplő kitüntetett stabil párosítást szokás **fiú-optimális** stabil párosításnak is nevezni. Természetesen lány-optimális stabil párosítás is létezik.

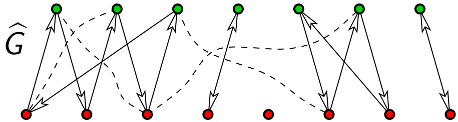
A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

Biz: Az éltörlések utáni $\widehat{G}$ gráfban a fiúk legjobb élei olyan M párosítást alkotnak, ami a lányok a legrosszabb éleiből áll. Ezért M a $\widehat{G}$ minden élét dominálja, így M stabil $\widehat{G}$-ben. Az éltörlési lemma miatt M stabil G-ben is. A tétel második része abból adódik, hogy törölt él nem szerepelhet stabil párosításban. $\square$



A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut. $\square$

A stabil házassági tétel

Gale és Shapley tétele: Ha a G páros gráf színosztályait fiúk és lányok alkotják akkor tetszőleges preferenciasorrendekhez van stabil párosítás. Ha több stabil párosítás is van, akkor van ezek között olyan is, amiben minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, miközben minden lánynak a számára stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut. □

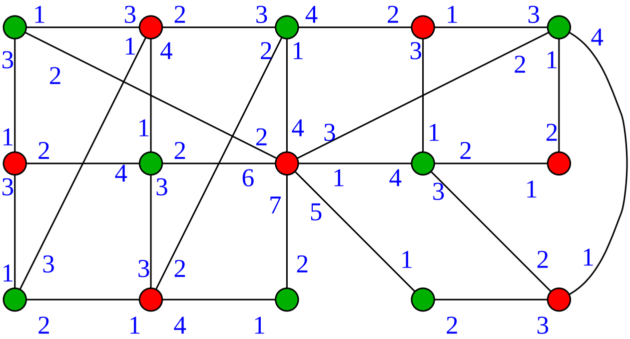
Az éltörlési lemmából hatékony algoritmus adódik a fiú-optimális stabil párosítás keresésére. Ehhez nem is szükséges minden lehetséges éltörlést végrehajtani: elég csak olyanokat, ahol a törlendő él egy fiú legjobb éle az alábbiak szerint.

Lánykérő algoritmus (Deferred acceptance algorithm)

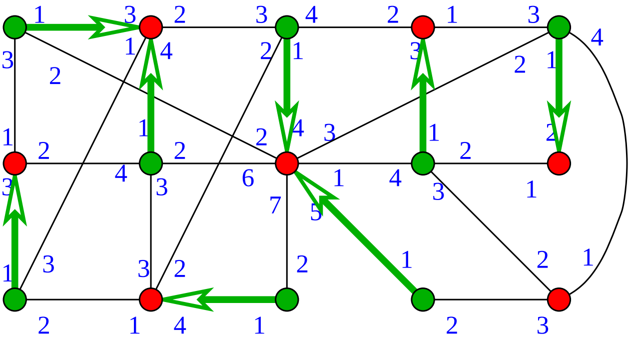
1. Minden fiú megkéri a számára legszimpatikusabb lány kezét.
2. Ha van olyan lány, aki legalább két kérőt kap, akkor a legjobb kivételével mindegyik kérőjét kikosarazza. GoTo 1.
3. Ha egy lánynak sincs egynél több kérője, akkor a lánykérések (fiú-optimális) stabil párosítást adnak, végeztünk.

Konkrét lánykérő algoritmus

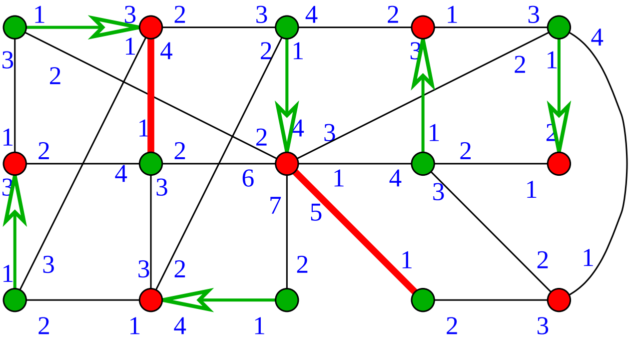
Konkrét lánykérő algoritmus



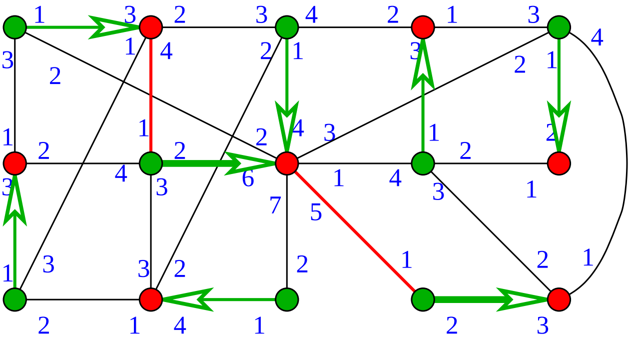
Konkrét lánykérő algoritmus



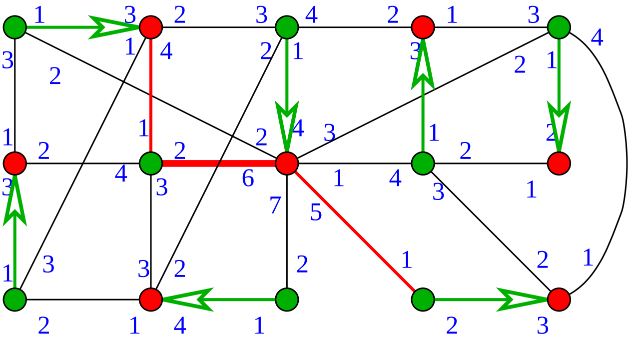
Konkrét lánykérő algoritmus



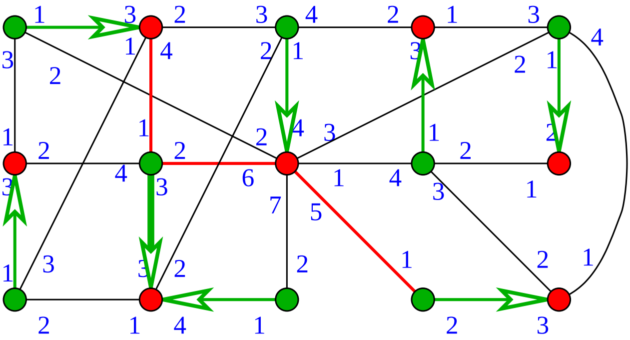
Konkrét lánykérő algoritmus



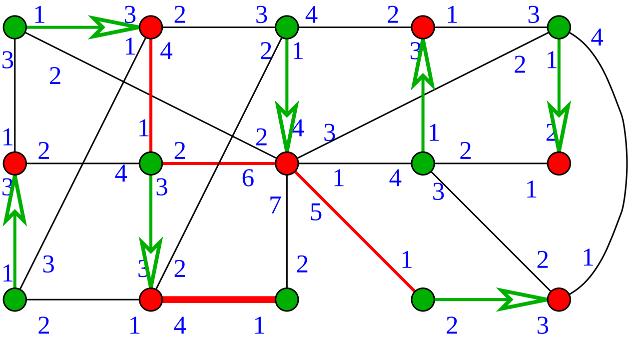
Konkrét lánykérő algoritmus



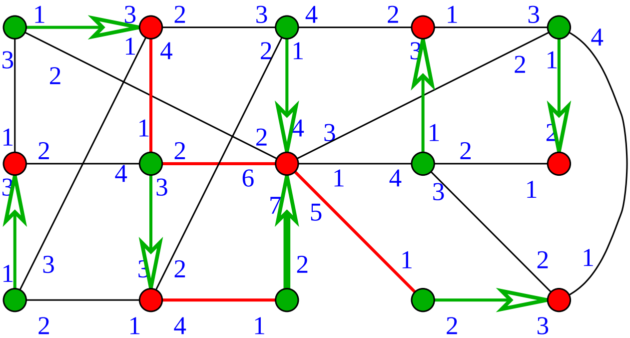
Konkrét lánykérő algoritmus



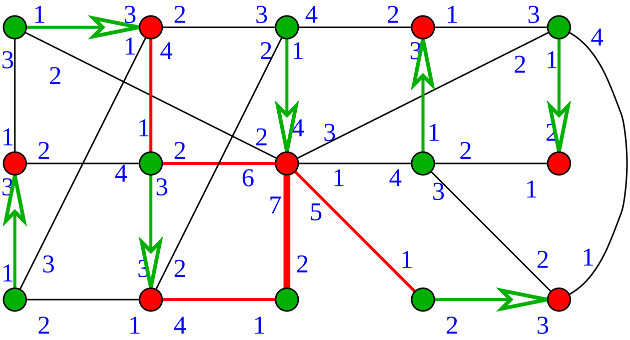
Konkrét lánykérő algoritmus



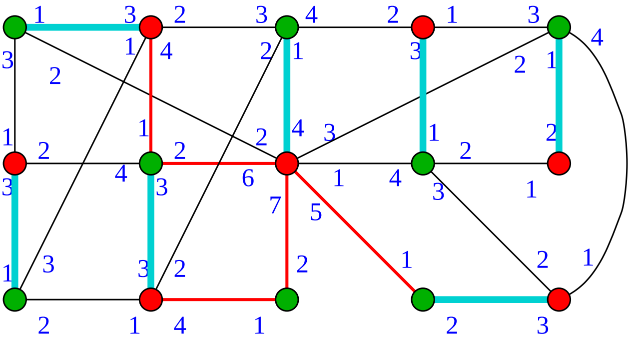
Konkrét lánykérő algoritmus



Konkrét lánykérő algoritmus

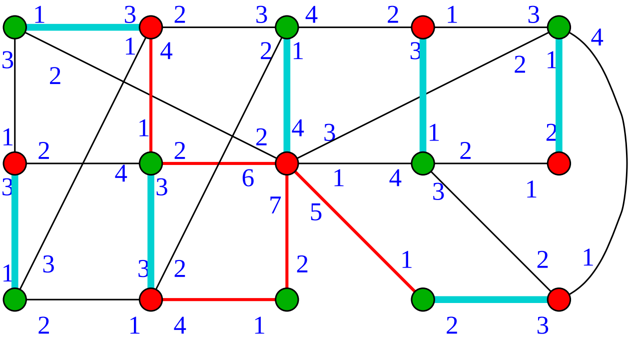


Konkrét lánykérő algoritmus



Megvan!

Konkrét lánykérő algoritmus



Megvan!

Talány: Vajon lehet-e mindezt általánosítani?

Poligámia?

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ ***b*-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ b-**párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Megj: Az 1-párosítás pontosan a (jelző nélküli) párosítás.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ ***b*-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ ***b*-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott $E(v)$-n egy $\preceq_v$ lineáris rendezés valamint egy $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát.
Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz ***b*-dominálja** az $e \in E$ élt, ha $\exists$ $v \in V$ és $m_1, m_2, \ldots, m_{b(v)} \in M$, amire $m_1 \prec_v m_2 \prec_v \ldots \prec_v m_{b(v)} \prec_v e$.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ ***b*-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott $E(v)$-n egy $\preceq_v$ lineáris rendezés valamint egy $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát.
Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz ***b*-dominálja** az $e \in E$ élt, ha $\exists\ v \in V$ és $m_1, m_2, \ldots, m_{b(v)} \in M$, amire $m_1 \prec_v m_2 \prec_v \ldots \prec_v m_{b(v)} \prec_v e$.
Ha M nem b-dominálja $e \notin M$-et, akkor e **(*b*-)blokkolja** M-et.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ **b-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott $E(v)$-n egy $\preceq_v$ lineáris rendezés valamint egy $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát.
Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz **b-dominálja** az $e \in E$ élt, ha $\exists\ v \in V$ és $m_1, m_2, \ldots, m_{b(v)} \in M$, amire $m_1 \prec_v m_2 \prec_v \ldots \prec_v m_{b(v)} \prec_v e$.
Ha M nem b-dominálja $e \notin M$-et, akkor e **(b-)blokkolja** M-et.
M **stabil b-párosítás** ha az M b-dominálta élek halmaza $E \setminus M$.

Poligámia?

Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ ***b*-párosítás** ha $|M(v)| \le b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott $E(v)$-n egy $\preceq_v$ lineáris rendezés valamint egy $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát.
Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz ***b*-dominálja** az $e \in E$ élt, ha $\exists\ v \in V$ és $m_1, m_2, \ldots, m_{b(v)} \in M$, amire $m_1 \prec_v m_2 \prec_v \ldots \prec_v m_{b(v)} \prec_v e$.
Ha M nem b-dominálja $e \notin M$-et, akkor e **(*b*-)blokkolja** M-et.
M **stabil *b*-párosítás** ha az M b-domináltа élek halmaza $E \setminus M$.
Megf: (1) Minden stabil b-párosítás b-párosítás. Tehát a stabil b-párosítás olyan b-párosítás, ami G minden más élét b-dominálja.
(2) Egy b-párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se b-blokkolja.

Poligámia?

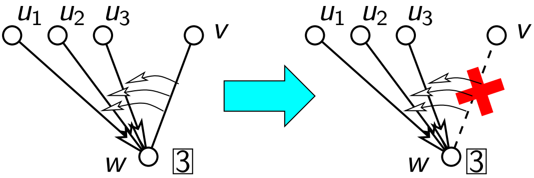
Def: $G = (V, E)$ gráf és $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát esetén $M \subseteq E$ **b-párosítás** ha $|M(v)| \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára.
Tfh a $G = (V, E)$ gráf minden $v \in V$ csúcsára adott $E(v)$-n egy $\preceq_v$ lineáris rendezés valamint egy $b : V \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát.
Def: Az $M \subseteq E$ élhalmaz **b-dominálja** az $e \in E$ élt, ha $\exists\ v \in V$ és $m_1, m_2, \ldots, m_{b(v)} \in M$, amire $m_1 \prec_v m_2 \prec_v \ldots \prec_v m_{b(v)} \prec_v e$.
Ha M nem b-dominálja $e \notin M$-et, akkor e **(b-)blokkolja** M-et.
M **stabil b-párosítás** ha az M b-dominálta élek halmaza $E \setminus M$.
Megf: (1) Minden stabil b-párosítás b-párosítás. Tehát a stabil b-párosítás olyan b-párosítás, ami G minden más élét b-dominálja.
(2) Egy b-párosítás pontosan akkor stabil, ha egy él se b-blokkolja.

Kínzó kérés: Kiterjeszthető-e az éltörlési lemma b-párosításokra?

Éltörlés b-párosításokon

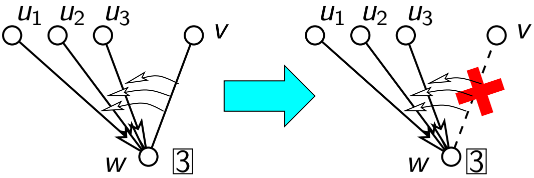
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.

Éltörlés b-párosításokon



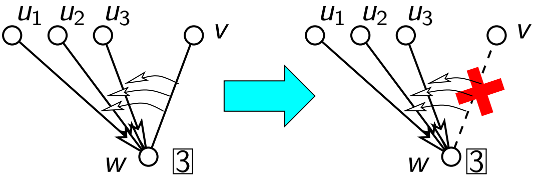
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).

Éltörlés b-párosításokon



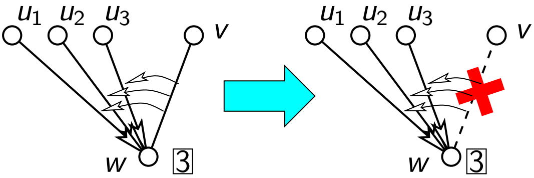
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).
Biz: $\Rightarrow$: Tfh M stabil G-ben. Ekkor vagy minden $u_i w \in M$ vagy M dominálja valamelyik $u_i w$-t. Utóbbi dominálás csak w-nél történhet, ezért $vw \notin M$. Így aztán M a $(G - vw)$ gráfban is b-párosítás, és mivel minden más élt b-dominál, stabil is egyúttal.

Éltörlés b-párosításokon



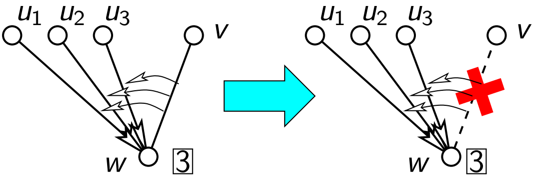
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).
Biz:

Éltörlés b-párosításokon



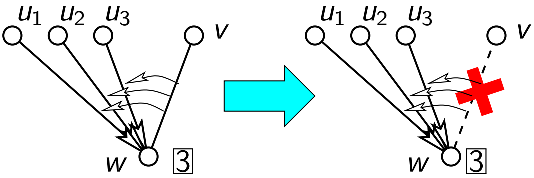
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben).
Biz: $\Leftarrow$: Tfh M stabil $(G - vw)$-ben. Azt kell igazolni, hogy M dominálja vw-t. Ha $u_i w \in M$ $\forall i$-re, akkor $u_i w \prec_w vw$ miatt ez világos, ha viszont $u_i w \notin M$ egy konkrét i-re, akkor M az $u_i w$ mellett vw-t is b-dominálja w-nél. $\square$

Éltörlés b-párosításokon



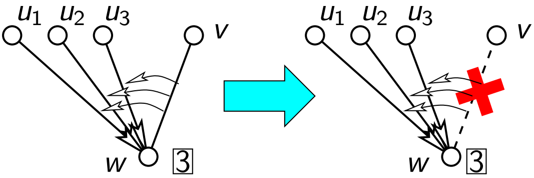
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \dots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). □

Éltörlés b-párosításokon



Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \dots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$
Köv: Ha a $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés, akkor $\delta(v) = \rho(v)$ $\forall v \in V(\widehat{G})$ és $\widehat{G}$ tetsz. $e = uv$ élére (e a $\prec_v$-legrosszabb él) $\Rightarrow$ (e egy $\prec_u$-legjobb él).

Éltörlés b-párosításokon



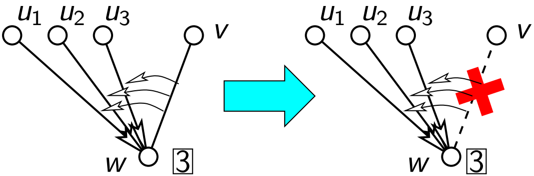
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.

Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$

Köv: Ha a $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés, akkor $\delta(v) = \rho(v)$ $\forall v \in V(\widehat{G})$ és $\widehat{G}$ tetsz. $e = uv$ élére
(e a $\prec_v$-legrosszabb él) $\Rightarrow$ (e egy $\prec_u$-legjobb él).

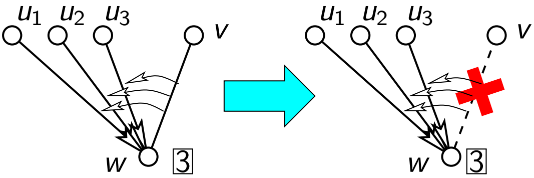
Biz: $\delta(v) \geq \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$

Éltörlés b-párosításokon



Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
$(M$ stabil G-ben$) \iff (M$ stabil $(G - vw)$-ben$)$. $\square$
Köv: Ha a $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés, akkor $\delta(v) = \rho(v)\ \forall v \in V(\widehat{G})$ és $\widehat{G}$ tetsz. $e = uv$ élére
(e a $\prec_v$-legrosszabb él) $\Rightarrow$ (e egy $\prec_u$-legjobb él).
Biz: $\delta(v) \geq \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$ és $\tilde{\delta}(V(\widehat{G})) = |A(\widehat{G})| = \tilde{\rho}(V(\widehat{G}))$

Éltörlés b-párosításokon



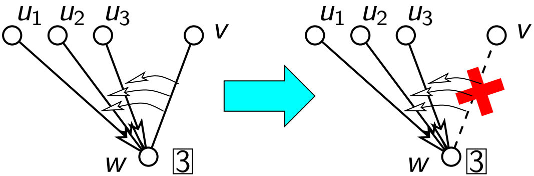
Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.

Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
$(M$ stabil G-ben$) \iff (M$ stabil $(G - vw)$-ben$)$. □

Köv: Ha a $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés, akkor $\delta(v) = \rho(v)\ \forall v \in V(\widehat{G})$ és $\widehat{G}$ tetsz. $e = uv$ élére
$(e$ a $\prec_v$-legrosszabb él$) \Rightarrow (e$ egy $\prec_u$-legjobb él$)$.

Biz: $\delta(v) \geq \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$ és $\tilde{\delta}(V(\widehat{G})) = |A(\widehat{G})| = \tilde{\rho}(V(\widehat{G}))$, ezért $\delta(v) = \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$.

Éltörlés b-párosításokon



Def: Tfh $b : V(G) \to \mathbb{N}$ rögzített. Az u **legjobb élei** a $\prec_u$ szerint legjobb (legfeljebb) $b(u)$ db él. (Ezeket u-ból kifelé irányítjuk.)
Az u **legrosszabb éle** a $\prec_u$ szerint legrosszabb él.
Kiterjesztett éltörlési lemma: Tfh minden $i = 1, 2, \ldots, b(w)$-re $u_i w$ egy $\prec_{u_i}$-legjobb él és $u_i w \prec_w vw$. Ekkor
(M stabil G-ben) $\iff$ (M stabil $(G - vw)$-ben). $\square$
Köv: Ha a $\widehat{G}$ gráfon nem végezhető a lemma alapján éltörlés, akkor $\delta(v) = \rho(v)$ $\forall v \in V(\widehat{G})$ és $\widehat{G}$ tetsz. $e = uv$ élére
(e a $\prec_v$-legrosszabb él) $\Rightarrow$ (e egy $\prec_u$-legjobb él).
Biz: $\delta(v) \geq \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$ és $\tilde{\delta}(V(\widehat{G})) = |A(\widehat{G})| = \tilde{\rho}(V(\widehat{G}))$, ezért $\delta(v) = \rho(v) \forall v \in V(\widehat{G})$. Ha $d(v) \leq b(v)$, akkor $\forall e \in E(v)$ mindkét csúcsának egy legjobb éle, ha pedig $d(v) > b(v)$, akkor $\rho(v) = b(v)$, így a $\prec_v$-legrosszabb él v felé van irányítva. $\square$

Stabil b-párosítás páros gráfon

Tétel: Tetsz., A és B színosztályokkal rendelkező G páros gráf, $b : V(G) \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát és $\prec_v$ csúcspreferenciák esetén van stabil b-párosítás. Ha több is van, akkor van ezek között olyan is, amiben az A-beli csúcsokra a legjobb olyan élek illeszkednek, amelyek stabil b-párosításban előfordulhatnak.

Stabil b-párosítás páros gráfon

Tétel: Tetsz., A és B színosztályokkal rendelkező G páros gráf, $b : V(G) \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát és $\prec_v$ csúcspreferenciák esetén van stabil b-párosítás. Ha több is van, akkor van ezek között olyan is, amiben az A-beli csúcsokra a legjobb olyan élek illeszkednek, amelyek stabil b-párosításban előfordulhatnak.

Biz: Az éltörlések utáni $\widehat{G}$ gráfban az A-beli csúcsok legjobb éleinek M halmaza b-párosítást alkot. Mivel M a $\widehat{G}$ minden más élét dominálja, így M b-stabil $\widehat{G}$-ben. A kiterjesztett éltörlési lemma miatt M a G-ben is stabil. A tétel második része abból adódik, hogy törölt él nem szerepelhet stabil b-párosításban. $\square$

Stabil b-párosítás páros gráfon

Tétel: Tetsz., A és B színosztályokkal rendelkező G páros gráf, $b : V(G) \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát és $\prec_v$ csúcspreferenciák esetén van stabil b-párosítás. Ha több is van, akkor van ezek között olyan is, amiben az A-beli csúcsokra a legjobb olyan élek illeszkednek, amelyek stabil b-párosításban előfordulhatnak. $\square$

Stabil b-párosítás páros gráfon

Tétel: Tetsz., A és B színosztályokkal rendelkező G páros gráf, $b : V(G) \to \mathbb{N}$ fokszámkorlát és $\prec_v$ csúcspreferenciák esetén van stabil b-párosítás. Ha több is van, akkor van ezek között olyan is, amiben az A-beli csúcsokra a legjobb olyan élek illeszkednek, amelyek stabil b-párosításban előfordulhatnak. $\square$

Itt is van hatékony algoritmus az A-optimális stabil b-párosítás keresésére.

Kiterjesztett lánykérő algoritmus

1. Minden $v \in A$ csúcs ajánlatot tesz a $b(v)$ legjobb él mentén.
2. Ha egy $u \in B$ csúcs $b(u)$-nál több ajánlatot kap, akkor a legjobb $b(u)$ db-ot megtartja, a többit visszautasítja. GoTo 1.
3. Ha minden $u \in B$ csúcs legfejebb $b(u)$ ajánlatot kap, akkor az ajánlatok (A-optimális) stabil b-párosítást adnak, végeztünk.

Stabil párosítások struktúrája

Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

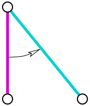
Stabil párosítások struktúrája

Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

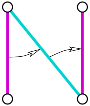


Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

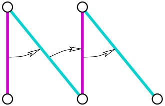


Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

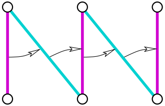


Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

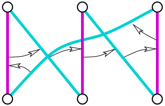


Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

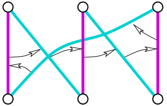


Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.)

Stabil párosítások struktúrája

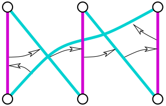


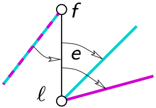
Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.) 2.: 1.-ből közvetlenül adódik.

Stabil párosítások struktúrája





Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil párosítások. Ekkor

1. $M_1 \Delta M_2$ komponensei preferenciakörök.
2. $V(M_1) = V(M_2)$, azaz minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fedi.
3. Ha minden fiú $M_1 \cup M_2$-ből a jobbik élt választja, a kapott $M_1 \vee M_2$ olyan stabil párosítás, amiben minden lány a számára rosszabb élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből. ($M_1 \wedge M_2$ úgy kapható, hogy a lányok választanak.)

Biz: 1.: Ld ábra. ($M_1 \Delta M_2$ egyetlen éle sem blokkolhatja a másik stabil párosítást.) 2.: 1.-ből közvetlenül adódik.
3.: 1. miatt $M_1 \vee M_2$ párosítás és minden lány a rosszabb élt kapja. Ha $M_1 \vee M_2$ nem dominálja az $e = f\ell$ élt f-nél, akkor M_1 és M_2 is ℓ-nél dominálja e-t. Ezért $M_1 \vee M_2$ is. $\square$

Stabil b-párosítások struktúrája

Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil b-párosítások. Ekkor

1. $d_{M_1 \setminus M_2}(v) = d_{M_2 \setminus M_1}(v)\ \forall v \in V(G)$.
2. (Rural hospitals theorem)
   $d_{M_1} = d_{M_2}$, és ha $d_{M_1}(v) < b(v)$, akkor $M_1(v) = M_2(v)$, azaz ha v telítetlen egy stabil b-párosításban, akkor v minden stabil b-párosításban ugyanazon élek mentén van összepárosítva.
3. Ha minden v fiú a legjobb $b(v)$ élt választja $M_1 \cup M_2$-ből, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil b-párosítást kapunk. Ebben **nem biztos**, hogy minden u lány a számára legrosszabb $b(u)$ élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből.

Stabil b-párosítások struktúrája

Tétel: Tfh a G páros gráf színosztályait fiúk ill. lányok alkotják és M_1, M_2 stabil b-párosítások. Ekkor

1. $d_{M_1 \setminus M_2}(v) = d_{M_2 \setminus M_1}(v)\ \forall v \in V(G)$.
2. (Rural hospitals theorem)
   $d_{M_1} = d_{M_2}$, és ha $d_{M_1}(v) < b(v)$, akkor $M_1(v) = M_2(v)$, azaz ha v telítetlen egy stabil b-párosításban, akkor v minden stabil b-párosításban ugyanazon élek mentén van összepárosítva.
3. Ha minden v fiú a legjobb $b(v)$ élt választja $M_1 \cup M_2$-ből, akkor egy $M_1 \vee M_2$ stabil b-párosítást kapunk. Ebben **nem biztos**, hogy minden u lány a számára legrosszabb $b(u)$ élt kapja $M_1 \cup M_2$-ből.

Biz: $M_1 \Delta M_2$ komponenseit érdemes figyelni, nem részletezzük. $\square$

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus
- Fiú-optimális stabil párosítás

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus
- Fiú-optimális stabil párosítás
- b-párosítások stabilitása

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus
- Fiú-optimális stabil párosítás
- b-párosítások stabilitása
- Éltörlési lemma kiterjesztése

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus
- Fiú-optimális stabil párosítás
- b-párosítások stabilitása
- Éltörlési lemma kiterjesztése
- Stabil párosításos struktúrája

Mit tanultunk ma?

- Csúcsok preferenciarendezése az éleken, dominálás
- Stabil párosítás
- Éltörlési lemma
- Éltörlések utáni gráf struktúrája
- Lánykérő algoritmus
- Fiú-optimális stabil párosítás
- *b*-párosítások stabilitása
- Éltörlési lemma kiterjesztése
- Stabil párosításos struktúrája

Vége