Gráfok és algoritmusok

3. előadás, stabil párosítások struktúrája és alkalmazásai

2024. február 29.

Hol tartunk?

- Csúcspreferenciák, (b-)dominálás, stabil (b-)párosítás, (b-)blokkolás

Hol tartunk?

- Csúcspreferenciák, (b-)dominálás, stabil (b-)párosítás, (b-)blokkolás
- Éltörlési lemma

Hol tartunk?

- Csúcspreferenciák, (b-)dominálás, stabil (b-)párosítás, (b-)blokkolás
- Éltörlési lemma
- Páros gráfban mindig van stabil (b-)párosítás, lánykérő algoritmus fiú/lány-optimalitás

Hol tartunk?

- Csúcspreferenciák, (b-)dominálás, stabil (b-)párosítás, (b-)blokkolás
- Éltörlési lemma
- Páros gráfban mindig van stabil (b-)párosítás, lánykérő algoritmus fiú/lány-optimalitás
- Preferenciakörök, rural hospitals tétel, stabil párosítások hálótulajdonsága

Stabil párosítások mediánja

Láttuk, hogy ha két stabil párosításból a fiúk a jobb párt választják, akkor olyan stabil párosítás adódik, amiben a lányok a rosszabbat párjukat kapják. Gyakorlaton szerepelt(?), hogy ha három stabil párosítás esetén mindenki a preferenciája szerint középső párt választja, szintén stabil párosítást kapunk.

Van-e vajon e mögött vmi általánosabb igazság?

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Biz: Valóban: $M(1) = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_k =: \bigvee_{i=1}^{k} M_i$. $\square$

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Biz: Valóban: $M(1) = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_k =: \bigvee_{i=1}^{k} M_i$. □

Megj:

(1) A fenti bizonyításban szereplő formula azért értelmes, mert a $\vee$ (unió, angolul: join) hálóművelet asszociatív (átzárójelezhető).

(2) Ha pl. $M_1, M_2, \ldots, M_k$ a G összes stabil párosítása, akkor $\bigvee_{i=1}^{k} M_i$ épp a fiú-optimális stabil párosítás.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.
Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Megj:

(1) Az ℓ-dik legjobb pár választásakor multiplicitással számolunk.
Pl. $k = 8$ esetén ha f párjai (csökkenő preferencia szerint) x, x, y, y, y, z, t, t, akkor f 4-dik és 5-dik legjobb párja is y.

(2) A fenti tétel stabil b-párosításokra is általánosítható.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Biz: Legyen $M_1(v), \ldots, M_k(v)$ a megadott k párosításnak a v fiú preferenciája szerinti felsorolása: $M_1(v)$-ben kapja v a legjobb, $M_k(v)$-ben pedig a legrosszabb párt. Az $M(v, \ell) := \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i(v)$ stabil párosításban v az ℓ-dik legjobb párját kapja

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Biz: Legyen $M_1(v), \ldots, M_k(v)$ a megadott k párosításnak a v fiú preferenciája szerinti felsorolása: $M_1(v)$-ben kapja v a legjobb, $M_k(v)$-ben pedig a legrosszabb párt. Az $M(v, \ell) := \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i(v)$ stabil párosításban v az ℓ-dik legjobb párját kapja, minden más u fiú a j_u-dik legjobbat, ahol $j_u \geq \ell$.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.
Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.
Biz: Legyen $M_1(v), \ldots, M_k(v)$ a megadott k párosításnak a v fiú preferenciája szerinti felsorolása: $M_1(v)$-ben kapja v a legjobb, $M_k(v)$-ben pedig a legrosszabb párt. Az $M(v,\ell) := \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i(v)$ stabil párosításban v az ℓ-dik legjobb párját kapja, minden más u fiú a j_u-dik legjobbat, ahol $j_u \geq \ell$. Ezért $M(\ell) := \bigvee_{\forall v} M(v,\ell)$ olyan stabil párosítás, amiben minden fiú **pontosan** az ℓ-dik legjobb párját kapja.

Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Biz: Legyen $M_1(v), \ldots, M_k(v)$ a megadott k párosításnak a v fiú preferenciája szerinti felsorolása: $M_1(v)$-ben kapja v a legjobb, $M_k(v)$-ben pedig a legrosszabb párt. Az $M(v,\ell) := \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i(v)$ stabil párosításban v az ℓ-dik legjobb párját kapja, minden más u fiú a j_u-dik legjobbat, ahol $j_u \geq \ell$. Ezért $M(\ell) := \bigvee_{\forall v} M(v,\ell)$ olyan stabil párosítás, amiben minden fiú **pontosan** az ℓ-dik legjobb párját kapja. Ha $i < j$, akkor minden fiú $M(i)$-t preferálja $M(j)$-vel szemben, ezért $M(i) \Delta M(j)$ preferenciakörei miatt $M(j)$ minden lány számára jobb, mint $M(i)$.

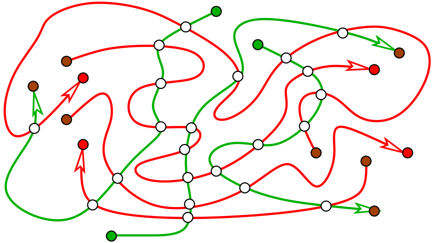
Stabil párosítások mediánja

Megf: Ha $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások a fiú és lány színosztályokkal rendelkező G páros gráfban, és minden fiú a legjobb párját választja, akkor olyan $M(1)$ stabil párosítást kapunk, amiben minden lány a legrosszabb párját kapja.

Tétel: Ha minden fiú az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ stabil párosítások szerinti ℓ-dik legjobb párját választja, akkor olyan $M(\ell)$ stabil párosítást kapunk, ahol minden lány az ℓ-dik legrosszabb párját kapja.

Biz: Legyen $M_1(v), \ldots, M_k(v)$ a megadott k párosításnak a v fiú preferenciája szerinti felsorolása: $M_1(v)$-ben kapja v a legjobb, $M_k(v)$-ben pedig a legrosszabb párt. Az $M(v, \ell) := \bigwedge_{i=1}^{\ell} M_i(v)$ stabil párosításban v az ℓ-dik legjobb párját kapja, minden más u fiú a j_u-dik legjobbat, ahol $j_u \geq \ell$. Ezért $M(\ell) := \bigvee_{\forall v} M(v, \ell)$ olyan stabil párosítás, amiben minden fiú **pontosan** az ℓ-dik legjobb párját kapja. Ha $i < j$, akkor minden fiú $M(i)$-t preferálja $M(j)$-vel szemben, ezért $M(i) \Delta M(j)$ preferenciakörei miatt $M(j)$ minden lány számára jobb, mint $M(i)$. Tehát $M(\ell)$ minden lányhoz az ℓ-dik legrosszabb párját rendeli. $\square$

Utak linking tulajdonsága



Gale és Shapley tételének egy váratlan alkalmazása

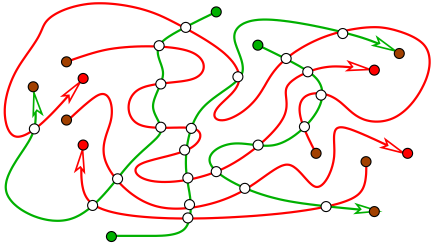
Pym linking tétele: Tfh $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ a D irányított gráf pként pontdiszjunkt piros ill. pként pontdiszjunkt zöld utakat tartalmazó halmazai. Ekkor található D-ben pként pontdiszjunkt barna utak egy $\mathcal{R}$ halmaza az alábbi tulajdonságokkal.

(1) Minden piros kezdőpontból indul barna út.

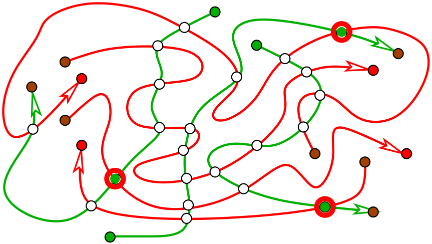
(2) Minden zöld végpontba érkezik barna út.

(3) Minden barna út vagy egy teljes piros út vagy egy teljes zöld út vagy egy piros út kezdetéből és egy zöld út végéből áll.

Utak linking tulajdonsága

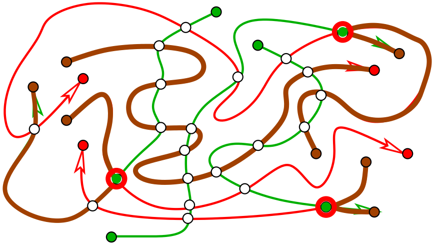


Utak linking tulajdonsága



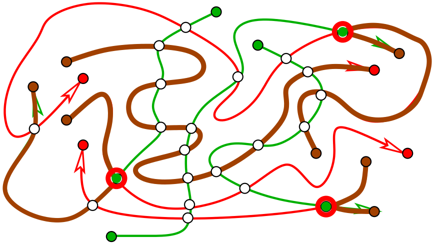
Biz: A piros-zöld váltópontokat keressük.
Minden piros/zöld úton ≤ 1 váltópont lehet.
Barna utak: a vp-k meghatározta utak + vp-mentes p/z utak.

Utak linking tulajdonsága



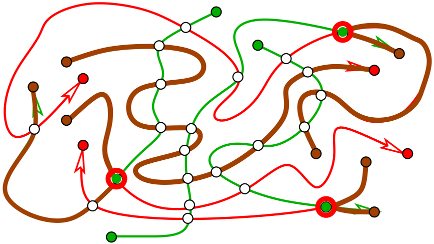
Biz: A piros-zöld váltópontokat keressük.
Minden piros/zöld úton ≤ 1 váltópont lehet.
Barna utak: a vp-k meghatározta utak + vp-mentes p/z utak.

Utak linking tulajdonsága



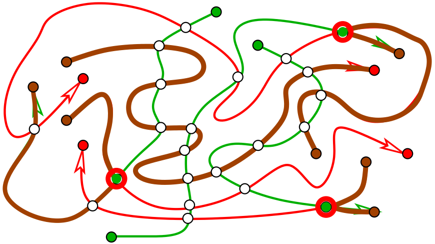
Biz: A piros-zöld váltópontokat keressük.
Minden piros/zöld úton ≤ 1 váltópont lehet.
Barna utak: a vp-k meghatározta utak + vp-mentes p/z utak.
D **segédgráf** csúcsai a p & z utak, élei a p-z út-metszéspontok.

Utak linking tulajdonsága



Biz: A piros-zöld váltópontokat keressük.
Minden piros/zöld úton ≤ 1 váltópont lehet.
Barna utak: a vp-k meghatározta utak + vp-mentes p/z utak.
D **segédgráf** csúcsai a p & z utak, élei a p-z út-metszéspontok.
Piros út preferenciája a végpont felé csökken, a zöldé nő.

Utak linking tulajdonsága



Biz: A piros-zöld váltópontokat keressük.
Minden piros/zöld úton ≤ 1 váltópont lehet.
Barna utak: a vp-k meghatározta utak + vp-mentes p/z utak.
D **segédgráf** csúcsai a p & z utak, élei a p-z út-metszéspontok.
Piros út preferenciája a végpont felé csökken, a zöldé nő.
A váltópontok D-ben párosításnak felelnek meg. Ha két barna út metszené egymást, a metszéspont a blokkolná a párosítást. Ezért stabil párosításnak megfelelő vp-halmazt keresünk. D páros gráf, van stabil párosítása, így létezik a kívánt $\mathcal{R}$. $\square$

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf ***k*-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf ***k*-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Természetes kérdés a $dom(G) := \min\{k : G \ k\text{-dominálható}\}$ gráfparaméter meghatározása.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf ***k*-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf ***k*-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.
Biz: Kőnig tétele szerint G élei kiszínezetők az $1, 2, \ldots, \Delta(G)$ színekkel. Definiálja az A színosztály csúcsain a preferenciát a színek nagyság szerinti, a B színosztály csúcsain pedig a színek nagyság szerinti fordított sorrendje. (Azaz $e, f \in E(v)$ esetén $e \prec_v f$ ha $c(e) < c(f)$ és $v \in A$ vagy ha $c(e) > c(f)$ és $v \in B$.)
Ha az $e = ab \in E(G)$ él színe $c(e) = i$, akkor
$\varphi(e) \leq |\{f \in E(a) : f \prec_a e\}| + |\{f \in E(b) : f \prec_b e\}| \leq$
$(i - 1) + (\Delta(G) - i) = \Delta(G) - 1 \Rightarrow G$ $(\Delta(G) - 1)$-dom.ható $\square$

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.

Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.

Tétel: G k-élszínezhető és $k \geq 1 \Rightarrow G$ $(k-1)$-dominálható.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf ***k*-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf ***k*-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.
Tétel: G k-élszínezhető és $k \geq 1 \Rightarrow G$ $(k-1)$-dominálható.
Biz: k szerinti indukció, a $k = 1$ eset triviális, a $k = 2$ könnyű.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf **k-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf **k-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.
Tétel: G k-élszínezhető és $k \geq 1 \Rightarrow G$ $(k-1)$-dominálható.
Biz: k szerinti indukció, a $k = 1$ eset triviális, a $k = 2$ könnyű. Tfh $(k-1)$-ig már igazoltuk az állítást és G éleit az $1, 2, \ldots, k$ színekkel színeztük. A k és $k-1$ színű élek törlésével kapott G' gráf $(k-2)$-élszínezhető, így $(k-3)$-dominálható az indukciós feltevés miatt. A törölt éleket irányítsuk úgy, hogy azok irányított utakat és köröket alkossanak. G' preferenciáit kiegészítjük: minden csúcsnak a kilépő éle legjobb, a belépő pedig legrosszabb. Ekkor $\varphi_G(e) \leq 2 + \varphi_{G'}(e) \leq k-1$ ha $e \in E(G')$, ill. $e \in E(G) \setminus E(G')$-re $\varphi(e) \leq \Delta(G) - 1 \leq k - 1$. Tehát G $(k-1)$-dominálható. $\square$

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf ***k*-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf ***k*-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.
Tétel: G k-élszínezhető és $k \geq 1 \Rightarrow G$ $(k-1)$-dominálható.

Alacsony domináltságú preferenciák

Def: Adott G gráf és $\preceq_v$ preferenciák esetén az $e = uv \in E(G)$ él **domináltsága** $\varphi(e) := |\{f \in E(G) : f \prec_u e \text{ vagy } f \prec_v e\}|$ az e-t domináló élek száma. A $\preceq_v$ preferenciák mellett a G gráf ***k*-dominált**, ha $\varphi(e) \leq k$ teljesül G minden e élére.
A G gráf ***k*-dominálható**, ha a csúcsaihoz megadhatók olyan $\preceq_v$ élpreferenciák, amelyek mellett G k-dominált.
Tétel: Minden $G = (A, B; E)$ ps gráf $(\Delta(G) - 1)$-dominálható.
Tétel: G k-élszínezhető és $k \geq 1 \Rightarrow G$ $(k-1)$-dominálható.
Megj: Azt láttuk, hogy $dom(G) \leq \chi'(G) - 1$.
Könnyen látható, hogy $dom(G) \geq \Delta(G) - 1$ ill. hogy $dom(C_n) = 1$.
Ezért $\Delta(G) - 1 \leq dom(G) \leq \chi'(G) - 1$ és ennél **általában** nem tudunk jobbat mondani.

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G = (V, E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G = (V, E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G=(V,E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c: E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G)=k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Biz: Legyen $k=\chi'(G)$. Ha $L(e)=\{1,2,\ldots,k-1\}$ $\forall e \in E$, akkor G nem L-élszínezhető, ezért $\chi'_\ell(G) \geq k$. $\square$

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G=(V,E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Biz: Legyen $k = \chi'(G)$. Ha $L(e) = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\forall e \in E$, akkor G nem L-élszínezhető, ezért $\chi'_\ell(G) \geq k$. $\square$

Megj: A χ' élkromatikus számra könnyű felső becslést adni (pl egy konkrét élszínezéssel), a χ'_ℓ él-listaszínezésire már ez sem triviális.

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G = (V, E)$ gráf ***L-élszínezhető***, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k-él-listaszínezhető***, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Biz: Legyen $k = \chi'(G)$. Ha $L(e) = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\forall e \in E$, akkor G nem L-élszínezhető, ezért $\chi'_\ell(G) \geq k$. $\square$

Megj: A χ' élkromatikus számra könnyű felső becslést adni (pl egy konkrét élszínezéssel), a χ'_ℓ él-listaszínezésire már ez sem triviális.

Megj: Tetsz. k-ra megadható G páros gráf és k méretű színlisták a **csúcsokhoz** amire nem lehet G csúcsait a listákból jól színezni. (Más szóval: $\chi(G) = 2$ mellett $\chi_\ell(G)$ tetsz. nagy lehet.)

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G = (V, E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Biz: Legyen $k = \chi'(G)$. Ha $L(e) = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\forall e \in E$, akkor G nem L-élszínezhető, ezért $\chi'_\ell(G) \geq k$. $\square$

Megj: A χ' élkromatikus számra könnyű felső becslést adni (pl egy konkrét élszínezéssel), a χ'_ℓ él-listaszínezésire már ez sem triviális.

Megj: Tetsz. k-ra megadható G páros gráf és k méretű színlisták a **csúcsokhoz** amire nem lehet G csúcsait a listákból jól színezni. (Más szóval: $\chi(G) = 2$ mellett $\chi_\ell(G)$ tetsz. nagy lehet.)

Listaszínezési sejtés (LCC):

Minden hurokélmentes véges G gráfra $\chi'(G) = \chi'_\ell(G)$ teljesül.

Él-listaszínezések

Def: Tfh a G gráf minden e éléhez adott egy $L(e) \subset \mathbb{N}$ színlista. A $G = (V, E)$ gráf ***L*-élszínezhető**, ha van olyan $c : E \to \mathbb{N}$ élszínezése, amire $c(e) \in L(e)$ $\forall e \in E$. A G gráf ***k*-él-listaszínezhető**, ha G L-élszínezhető minden olyan L esetén, amire $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$. A G **él-listaszínezési száma** $\chi'_\ell(G) = k$, ha G k-él-listaszínezhető, de nem $(k-1)$-él-listaszínezhető.

Megf: $\chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$ teljesül minden G gráfra.

Biz: Legyen $k = \chi'(G)$. Ha $L(e) = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\forall e \in E$, akkor G nem L-élszínezhető, ezért $\chi'_\ell(G) \geq k$. □

Megj: A χ' élkromatikus számra könnyű felső becslést adni (pl egy konkrét élszínezéssel), a χ'_ℓ él-listaszínezésire már ez sem triviális.

Megj: Tetsz. k-ra megadható G páros gráf és k méretű színlisták a **csúcsokhoz** amire nem lehet G csúcsait a listákból jól színezni. (Más szóval: $\chi(G) = 2$ mellett $\chi_\ell(G)$ tetsz. nagy lehet.)

Listaszínezési sejtés (LCC):
Minden hurokélmentes véges G gráfra $\chi'(G) = \chi'_\ell(G)$ teljesül.

Dinitz-sejtés: $\chi'_\ell(K_{n,n}) = n$

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.
Köv: Kőnig élszínezési tétele miatt $\chi'_\ell(G) = \Delta(G) = \chi'(G)$.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.
Biz: Mivel $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \chi'_\ell(G)$, ezért elég azt igazolni, hogy Δ méretű színlisták esetén G garantáltan L-élszínezhető. Tfh $L(e) \subset \mathbb{N}$ és $|L(e)| \geq \Delta(G)$ $\forall e \in E(G)$. Legyen $E_i := L^{-1}(i)$ az i-színezhető élek halmaza. Egy $M_0 \subseteq E_0$ párosítás éleit színezzük 0-ás színűre, egy $M_1 \subseteq E_1 - M_0$ párosítás éleit 1-es színre, sít. Ezáltal azonos színre színezett éleknek nem lesz közös csúcsa. Tehát az M_i párosítások alkalmas választásával ,,csak'' azt kell garantálni, hogy minden él megkapja vmik színt a listájából.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.
Biz: Mivel $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$, ezért elég azt igazolni, hogy Δ méretű színlisták esetén G garantáltan L-élszínezhető. Tfh $L(e) \subset \mathbb{N}$ és $|L(e)| \geq \Delta(G)$ $\forall e \in E(G)$. Legyen $E_i := L^{-1}(i)$ az i-színezhető élek halmaza. Egy $M_0 \subseteq E_0$ párosítás éleit színezzük 0-ás színűre, egy $M_1 \subseteq E_1 - M_0$ párosítás éleit 1-es színre, sít. Ezáltal azonos színre színezett éleknek nem lesz közös csúcsa. Tehát az M_i párosítások alkalmas választásával ,,csak'' azt kell garantálni, hogy minden él megkapja vmik színt a listájából. Rögz. olyan preferenciákat, amiben G $(\Delta - 1)$-dominált, és minden i-re legyen M_i az $E_i - (M_0 \cup \ldots \cup M_{i-1})$ élek alkotta gráf egy stabil párosítása. Ha egy e él nem kapja meg a listájában szereplő első $\Delta - 1$ szín valamelyikét, akkor minden ilyen i színre M_i tartalmaz e-t domináló élt. Mivel $\varphi(e) \leq \Delta - 1$, ezért a lista utolsó színéhez tartozó M_j párosítás nem tudja dominálni e-t, így $e \in M_j$. Tehát G csakugyan L-élszínezhető. $\square$

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.

Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.

Galvin tételének általánosítása: Tfh a $G = (V, E)$ gráf k-élszínezhető és $|L(e)| \geq k$ $\forall e \in E$, valamint az i színre színezhető élek $L^{-1}(i)$ halmaza nem tartalmaz páratlan kört semelyik i szín esetén sem. Ekkor G L-színezhető.

Galvin tétele

Galvin igazolta Dinitz sejtését, sőt, az LCC-t is páros gráfokra.
Galvin tétele: Ha G páros gráf, akkor $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$.
Galvin tételének általánosítása: Tfh a $G = (V, E)$ gráf k-élszínezhető és $|L(e)| \geq k \ \forall e \in E$, valamint az i színre színezhető élek $L^{-1}(i)$ halmaza nem tartalmaz páratlan kört semelyik i szín esetén sem. Ekkor G L-színezhető.
Biz: Lényegében azonos a Galvin-tétel iménti bizonyításával. Annyit kell csak megfigyelni, hogy mivel E_i nem tartalmaz páratlan kört, ezért $(V, E_i - (M_0 \cup \ldots \cup M_{i-1}))$ páros gráf, így található benne egy M_i stabil párosítás. $\square$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága
- Gráfok k-dominálhatósága

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága
- Gráfok k-dominálhatósága
- Gráfok él-listaszínezése

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága
- Gráfok k-dominálhatósága
- Gráfok él-listaszínezése
- Élkromatikus és éllistaszínezési szám kapcsolata, LCC

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága
- Gráfok k-dominálhatósága
- Gráfok él-listaszínezése
- Élkromatikus és éllistaszínezési szám kapcsolata, LCC
- Galvin tétele

Mit tanultunk ma?

- Több stabil párosítás közül a fiúk legjobb ill. a lányok legrosszabb választása
- A fiúk ℓ-dik legjobb választása
- Irányított utak linking tulajdonsága
- Gráfok k-dominálhatósága
- Gráfok él-listaszínezése
- Élkromatikus és éllistaszínezési szám kapcsolata, LCC
- Galvin tétele

Vége