Gráfok és algoritmusok

Minimális költségű folyamok

2025. április 1.

Bevezetés

A mai órán a korábban megismert folyammodellt gazdagítjuk azzal, hogy értelmezzük a folyamok költségét, majd egy algoritmus segítségével igazolunk egy, a Ford-Fulkerson tételt általánosító minimax formulát minimális költségű folyamokról.
Minimális költségű folyam keresésére olyan problémákat is vissza tudunk vezetni, amiken a korábbi eszközeink hatástalanok voltak. Egy ilyen lehetséges probléma a minimális költségű feszítőfa keresésének rokona. Itt az input egy páros gráf, aminek minden éléhez tartozik egy költség, a cél pedig egy olyan adott méretű (például teljes) párosítás keresése, amelyik éleinek összköltsége minimális. Szorosan kapcsolódik ehhez az az Egerváry magyar módszerével megoldható probléma, amelyikben a páros gráf éleihez rendelt számokra súlyokként tekintünk, és maximális súlyú (teljes) párosítást keresünk az input páros gráfban.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Megj: (1) Az a él $c(a)$ költsége egységnyi folyam a él mentén történő továbbításának ára. Egy z folyam költsége pedig az egyes élekhez számított költségek összege: ennyibe kerül a z folyam fenntartása.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Megj:

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Megj: (2) Ha $c \equiv 0$, akkor minden megengedett folyam minimális költségű, hiszen bármely megengedett folyam költsége 0.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Megj: (2) Ha $c \equiv 0$, akkor minden megengedett folyam minimális költségű, hiszen bármely megengedett folyam költsége 0.
(3) Nemcsak a $c \equiv 0$ költségfüggvény rendeklezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két azonos nagyságú folyam költsége megegyezik. Ha például $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukáló ponthalmaz, akkor szintén ilyen a

$$c_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \text{ kilép } X\text{-ből} \\ -1 & \text{ha } e \text{ belép } X\text{-be} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$ költségfüggvény, amire

$c_X(z) = m_z$ teljesül bármely z megengedett folyamra.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Megj: (2) Ha $c \equiv 0$, akkor minden megengedett folyam minimális költségű, hiszen bármely megengedett folyam költsége 0.
(3) Nemcsak a $c \equiv 0$ költségfüggvény rendeklezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két azonos nagyságú folyam költsége megegyezik. Ha például $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukáló ponthalmaz, akkor szintén ilyen a

$$c_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \text{ kilép } X\text{-ből} \\ -1 & \text{ha } e \text{ belép } X\text{-be} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$ költségfüggvény, amire

$c_X(z) = m_z$ teljesül bármely z megengedett folyamra.
(4) A fenti típusú c_X költégfüggvények lineáris kombinációja is hasonló tulajdonságú költségfüggvény. Mivel a továbbiakban fontos szerepük lesz, célszerű ezeket külön definiálni.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Def: A **potenciál** egy olyan $\pi : V \to \mathbb{R}_+$ hozzárendelés, amire $0 = \pi(s) \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ teljesül D minden $v \in V$ csúcsára. Ekkor a π **indukálta költségfüggvény** $c_\pi(uv) = \pi(v) - \pi(u)$ $(\forall uv \in A)$. Ennek segítségével definiáljuk c-ből a $c' = c - c_\pi$ **módosított költségfüggvényt**: minden $e = uv \in A$ él költségéből levonjuk az e által végrehajtott potenciálugrást: $c'(e) := c(e) + \pi(u) - \pi(v)$.

Minimális költségű folyamok, potenciálok

Def: Legyen $D = (V, A)$ digráf. A (D, s, t, g) hálózatban a z megengedett folyam a $c : A \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre nézve **minimális költségű**, ha a z folyam $c(z) = \sum_e c(e)z(e)$ költsége a lehető legkisebb a z-vel megegyező nagyságú st-folyamok között.

Def: A **potenciál** egy olyan $\pi : V \to \mathbb{R}_+$ hozzárendelés, amire $0 = \pi(s) \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ teljesül D minden $v \in V$ csúcsára. Ekkor a π **indukálta költségfüggvény** $c_\pi(uv) = \pi(v) - \pi(u)$ $(\forall uv \in A)$. Ennek segítségével definiáljuk c-ből a $c' = c - c_\pi$ **módosított költségfüggvényt**: minden $e = uv \in A$ él költségéből levonjuk az e által végrehajtott potenciálugrást: $c'(e) := c(e) + \pi(u) - \pi(v)$.

Megj: Látni fogjuk, hogy tetszőleges π potenciál esetén $c_\pi(z) = m_z\pi(t)$ teljesül bármely megengedett st-folyamra. Ezért azonos nagyságú folyamok c_π szerinti költsége azonos. Mindegy tehát, hogy c vagy c' szerint minimális költségű folyamot keresük. A továbbiakban a célunk olyan π keresése, amire tetszőleges adott nagyságú z folyamról azonnal látszik, ha z a c' szerint minimális költségű.

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű.

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű.

Biz:

$$c(z) = \sum_{uv \in A(D)} c(uv)z(uv) = \sum_{uv}(c'(uv) + c_\pi(uv))z(uv) =$$
$$\sum_{uv} c'(uv)z(uv) + \sum_{uv}(\pi(v) - \pi(u))z(uv) =$$
$$= c'(z) + \sum_{v} \pi(v) \cdot (\sum_{vu} z(vu) - \sum_{uv} z(uv)) = c'(z) + m_z\pi(t) =$$
$$= \sum\{c'(uv)z(uv) : c'(uv) > 0\} + \sum\{c'(uv)z(uv) : c'(uv) < 0\} +$$
$$m_z\pi(t) \geq \sum\{c'(uv)g(uv) : c'(uv) < 0\} + m_z\pi(t).$$

Tehát $c(z) = c'(z) + m_z\pi(t)$, ezért

$$(z \text{ min.ktg-ű } c\text{-re}) \iff (z \text{ min.ktg-ű } c'\text{-re}).$$

Továbbá, ha végig egyenlőség áll, akkor z minimális költségű. $\square$

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű. $\square$

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű. □

Köv: A z megengedett st-folyam minimális költségű, ha valamely π potenciálra teljesülnek az alábbi optimalitási feltételek:

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv)$$
$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0 \quad \square$$

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű. $\square$

Köv: A z megengedett st-folyam minimális költségű, ha valamely π potenciálra teljesülnek az alábbi optimalitási feltételek:

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv)$$
$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0 \quad \square$$

Def: Az $e = uv \in A$ él módosított költségétől függően **olcsó**, **drága**, ill. **korrekt** ha $c'(e) < 0$, $c'(e) > 0$, ill. ha $c'(e) = 0$.

Megj: (1) A fenti optimalitási kritérium szerint ha minden olcsó él telített és minden drága él üres akkor z minimális költségű. Fontos következmény, hogy az optimalitási kritérium teljesülésekor minden telítetlen, nemüres élnek korrektnek kell lennie.

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű. $\square$

Köv: A z megengedett st-folyam minimális költségű, ha valamely π potenciálra teljesülnek az alábbi optimalitási feltételek:

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv)$$
$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0 \quad \square$$

Def: Az $e = uv \in A$ él módosított költségétől függően **olcsó**, **drága**, ill. **korrekt** ha $c'(e) < 0$, $c'(e) > 0$, ill. ha $c'(e) = 0$.

Megj:

Optimalitási feltételek

Állítás: Tegyük fel, hogy z a (D, s, t, g) hálózatban megengedett folyam, π pedig tetszőleges potenciál. Ekkor
(1) z pontosan akkor minimális költségű folyam a c ktgfv-re, ha z minimális költségű a módosított c' ktgfv-re. Továbbá
(2) ha $c'(a) > 0 \Rightarrow z(a) = 0$, és $c'(a) < 0 \Rightarrow z(a) = g(a)$, akkor z minimális költségű. □

Köv: A z megengedett st-folyam minimális költségű, ha valamely π potenciálra teljesülnek az alábbi optimalitási feltételek:

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv)$$
$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0 \quad \square$$

Def: Az $e = uv \in A$ él módosított költségétől függően **olcsó**, **drága**, ill. **korrekt** ha $c'(e) < 0$, $c'(e) > 0$, ill. ha $c'(e) = 0$.

Megj: (2) A Ford-Fulkerson-algoritmushoz hasonlóan, a $z \equiv 0$ folyamból kiindulva javító utak segítségével építünk maximális nagyságú folyamot. Csak korrekt éleken dolgozunk, és egy, az optimalitási kritériumot teljesítő potenciált is karbantartunk.

Minimális költségű folyam algoritmus

Input: (D, s, t, g) hálózat, $c, g : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész költség- és kapacitásfv., valamint egy $k \in \mathbb{Z}_+$ folyamnagyság.

Output: Min. ktg-ű k nagyságú z folyam és az optimalitását bizonyító $\pi : V \to \mathbb{Z}_+$ egész potenciál vagy k-nál kisebb st-vágás.

Minimális költségű folyam algoritmus

Input: (D, s, t, g) hálózat, $c, g : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész költség- és kapacitásfv., valamint egy $k \in \mathbb{Z}_+$ folyamnagyság.

Output: Min. ktg-ű k nagyságú z folyam és az optimalitását bizonyító $\pi : V \to \mathbb{Z}_+$ egész potenciál vagy k-nál kisebb st-vágás.

Működés: Kezdetben $z \equiv 0$ és $\pi \equiv 0$. Az algoritmus futása során az optimalitási kritériumokat végig megköveteljük. Adott z, π mellett uv **előreél**, ha uv korrekt és telítetlen, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Az uv **hátraél**, ha korrekt és a fordítottja nemüres, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Minimális költségű folyam algoritmus

Működés: Kezdetben $z \equiv 0$ és $\pi \equiv 0$. Az algoritmus futása során az optimalitási kritériumokat végig megköveteljük. Adott z, π mellett uv **előreél**, ha uv korrekt és telítetlen, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Az uv **hátraél**, ha korrekt és a fordítottja nemüres, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Minimális költségű folyam algoritmus

Működés: Kezdetben $z \equiv 0$ és $\pi \equiv 0$. Az algoritmus futása során az optimalitási kritériumokat végig megköveteljük. Adott z, π mellett uv **előreél**, ha uv korrekt és telítetlen, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Az uv **hátraél**, ha korrekt és a fordítottja nemüres, azaz ha $c'(uv) = 0$ és $z(vu) > 0$.

$\boxed{\textbf{I. eset}}$ Van előre- és hátraéleken st-út. Ekkor ezen tudunk s-ből t-be folyamot küldeni a maximális (egész) reziduális kapacitással. Ha eközben elérjük a k folyamnagyságot, megállunk, végeztünk. Ha nem, tovább keresünk javító utat.

Minimális költségű folyam algoritmus

$\boxed{\textbf{I. eset}}$ Van előre- és hátraéleken st-út. Ekkor ezen tudunk s-ből t-be folyamot küldeni a maximális (egész) reziduális kapacitással. Ha eközben elérjük a k folyamnagyságot, megállunk, végeztünk. Ha nem, tovább keresünk javító utat.

Minimális költségű folyam algoritmus

$\boxed{\textbf{I. eset}}$ Van előre- és hátraéleken st-út. Ekkor ezen tudunk s-ből t-be folyamot küldeni a maximális (egész) reziduális kapacitással. Ha eközben elérjük a k folyamnagyságot, megállunk, végeztünk. Ha nem, tovább keresünk javító utat.

$\boxed{\textbf{II. eset}}$ Nincs előre- és hátraéleken st-út. Legyen S az s-ből elérhető csúcsok halmaza, $t \notin S$.

A eset: Ha minden S-ből kilépő él telített, és minden S-be belépő élen 0 a folyam, akkor z maximális nagyságú, és véget ér az algoritmus. Ha $m_z < k$ akkor nincs k nagyságú st-folyam.

B eset: Ha van S-ből kilépő telítetlen él vagy S-be belépő pozitív folyamot hordozó él, akkor legyen ε ezen élek módosított költségei abszolút értékének minimuma. Pozitív egészek véges, nemüres halmazának minimumaként $\varepsilon > 0$. Ha most $V - S$-en minden potenciált ε-nal növelünk, akkor az optimalitási feltételek továbbra is teljesülnek, azonban a II.B esetben definiált S halmaz bővül. Így előbb-utóbb az I. vagy a II.A esetbe kerülünk.

Minimális költségű folyamok optimalitási tétele

A minimális költségű folyam fenti algoritmussal történő megkeresése igazolja az alábbi tételt.

Köv: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ és a $c : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ költségfüggvény egész. Ekkor bármely $k \in \mathbb{Z}_+$ célértékhez vagy létezik egy k-nál kisebb kapacitású st-vágás D-ben vagy található egy k nagyságú $z : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész st-folyam és egy $\pi : V(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész potenciál, ami z-vel együtt teljesíti az optimalitási feltételeket.

Minimális költségű folyamok optimalitási tétele

A minimális költségű folyam fenti algoritmussal történő megkeresése igazolja az alábbi tételt.

Köv: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ és a $c : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ költségfüggvény egész. Ekkor bármely $k \in \mathbb{Z}_+$ célértékhez vagy létezik egy k-nál kisebb kapacitású st-vágás D-ben vagy található egy k nagyságú $z : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész st-folyam és egy $\pi : V(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész potenciál, ami z-vel együtt teljesíti az optimalitási feltételeket.

Biz: A fenti algoritmus véges idő alatt lefut, hisz minden lépésben vagy legalább 1-gyel javítja a folyamot, vagy S bővül. Az algoritmus során z és π végig egész értéket vesz fel. $\square$

Minimális költségű folyamok optimalitási tétele

A minimális költségű folyam fenti algoritmussal történő megkeresése igazolja az alábbi tételt.

Köv: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ és a $c : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ költségfüggvény egész. Ekkor bármely $k \in \mathbb{Z}_+$ célértékhez vagy létezik egy k-nál kisebb kapacitású st-vágás D-ben vagy található egy k nagyságú $z : A(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész st-folyam és egy $\pi : V(D) \to \mathbb{Z}_+$ egész potenciál, ami z-vel együtt teljesíti az optimalitási feltételeket.

Biz: A fenti algoritmus véges idő alatt lefut, hisz minden lépésben vagy legalább 1-gyel javítja a folyamot, vagy S bővül. Az algoritmus során z és π végig egész értéket vesz fel. $\square$

Megj: A minimális költségű folyamot kereső algoritmus ebben a formájában nem polinomidejű, és nem egész költségekre ill. kapacitásokra nem is feltétlenül működik helyesen. Igaz azonban, hogy a javító út alkalmas választásával az algoritmus polinomidejűvé tehető, és igazolható a fenti **Köv** egészértékűségi feltevések és következtetések nélküli változata is.

Mit tanultunk ma?

- Folyam költsége, minimális költségű folyam
- Potenciál, potenciálugrással módosított költségfüggvény
- Optimalitási feltételek a módosított költségfüggvény alapján
- Minimális költségű folyam keresése előre- és hátraéleken történő javítással

Mit tanultunk ma?

- Folyam költsége, minimális költségű folyam
- Potenciál, potenciálugrással módosított költségfüggvény
- Optimalitási feltételek a módosított költségfüggvény alapján
- Minimális költségű folyam keresése előre- és hátraéleken történő javítással

Szorgos népünk győzni fog!