# Gráfok és algoritmusok

Merevkörű gráfok és a lexikografikus BFS

2025. áprlis 15.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.
- Ezen a megfigyelésen alapul az irányítatlan gráf egy minimális vágását megtaláló Nagamochi-Ibaraki-algoritmus.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.
- Ezen a megfigyelésen alapul az irányítatlan gráf egy minimális vágását megtaláló Nagamochi-Ibaraki-algoritmus.
- A maxvissza sorrendre vonatkozó kulcslemmát a BFS-t általánosító SFS bejárással, ezen bejárás befejezési sorrendjének folytonosságával és a folytonos sorrendhez tartozó élcímkézés segítségével igazoltuk.

# Hol is tartunk

- Definiáltuk a maxvissza sorrendet: mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legjobban kapcsolódik az eddig sorba rendezett csúcshalmazhoz.
- A maxvissza sorrend folytonos: a gráf minden komponense egy olyan intervallum ebben a sorrendben, amelyre az intervallumban az első kivételével minden csúcsnak van a sorrendben korábbi szomszédja.
- A maxvissza sorrend utolsó két tagjára $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$ teljesül a pként éldiszjunkt $v_n v_{n-1}$-utak maximális számára.
- Ezen a megfigyelésen alapul az irányítatlan gráf egy minimális vágását megtaláló Nagamochi-Ibaraki-algoritmus.
- A maxvissza sorrendre vonatkozó kulcslemmát a BFS-t általánosító SFS bejárással, ezen bejárás befejezési sorrendjének folytonosságával és a folytonos sorrendhez tartozó élcímkézés segítségével igazoltuk.
- A mai órán a a BFS bejárás egy fontos speciális esetét vizsgáljuk, és a segítségével jellemezzük a merevkörű gráfokat.

# A lexikografikus BFS

**Megj:** Ez volt az SFS bejárás első szabálya:

$\boxed{1'}$ Ha van elért csúcs, akkor választunk egyet, mondjuk $u$-t. **Minden** $uv$ élre, amire $v$ eléretlen, $v$ elértté válik az $uv$ mentén, majd $u$ befejezetté válik.

Láttuk, hogy ha $\boxed{1'}$ alkalmazásakor $u$-t mindig a legkorábban elért csúcsnak választjuk, akkor éppen a BFS bejárást kapjuk meg.

Ugyanezt úgy is felfoghatjuk, hogy az $u$ csúcs BFS-t megvalósító választásakor minden elért csúcs esetén megvizsgáljuk, hogy kik a befejezett szomszédai. Ennek ismeretébenben olyan $u$ csúcsot választunk, amelyiknek a befejezett szomszédai között előfordul egy lehető legkorábban befejezett csúcs.

Kiderül, hogy érdemes még tovább pontosítani az $u$ választását. Így egy további hasznos tulajdonságokkal rendelkező, speciális BFS bejárási algoritmust kapunk.

# A lexikografikus BFS

# A lexikografikus BFS

**Def:** **Lexikografikus szélességi keresés** olyan SFS bejárás, ahol az $\boxed{1'}$ esetben minden elért csúcshoz feljegyezzük a befejezett szomszédait, majd azt az elért csúcsot választjuk következő befejezendő $u$ csúcsnak, amelyiknek a befejezett szomszédsága a befejezési sorrend szerint lexikografikusan minimális.

# A lexikografikus BFS

**Def:** **Lexikografikus szélességi keresés** olyan SFS bejárás, ahol az $\boxed{1'}$ esetben minden elért csúcshoz feljegyezzük a befejezett szomszédait, majd azt az elért csúcsot választjuk következő befejezendő $u$ csúcsnak, amelyiknek a befejezett szomszédsága a befejezési sorrend szerint lexikografikusan minimális.

**Megj:** 1. A fenti definíció azt jelenti, hogy az $\boxed{1'}$ esetben minden elért $v$ csúcshoz növekvő sorrendbe rendezzük $v$ befejezett szomszédainak befejezési számait. Olyan csúcsot választunk, amelyikhez az első feljegyzett szám a legkisebb, ezen belül olyat, amelyikhez a második a lehető legkisebb, és így tovább. Ha egy vizsgált csúcshoz $k$-nál kevesebb számot jegyeztünk fel, és egy másikhoz legalább $k$-t, akkor a fenti összehasonlítás során az előbbit a $k$-dik lépésben kiszórjuk.

# A lexikografikus BFS

**Def:** **Lexikografikus szélességi keresés** olyan SFS bejárás, ahol az $\boxed{1'}$ esetben minden elért csúcshoz feljegyezzük a befejezett szomszédait, majd azt az elért csúcsot választjuk következő befejezendő $u$ csúcsnak, amelyiknek a befejezett szomszédsága a befejezési sorrend szerint lexikografikusan minimális.

**Megj:**

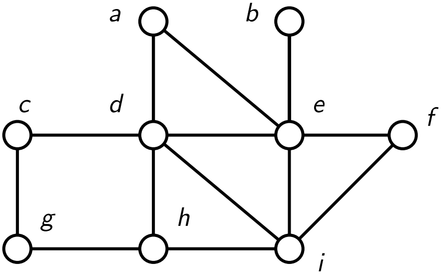
# A lexikografikus BFS

**Def:** **Lexikografikus szélességi keresés** olyan SFS bejárás, ahol az $\boxed{1'}$ esetben minden elért csúcshoz feljegyezzük a befejezett szomszédait, majd azt az elért csúcsot választjuk következő befejezendő $u$ csúcsnak, amelyiknek a befejezett szomszédsága a befejezési sorrend szerint lexikografikusan minimális.

**Megj:** 2. Érdemes megfigyelni, hogy a lexikografikus BFS szoros rokonságot mutat a maxvissza sorrendhez kapcsolódó bejárással. A maxvissza sorrend esetén mindig az a soron következő gráfcsúcs, amelyik a legtöbb éllel kapcsolódik a korábban sorba rendezett csúcshalmazhoz.
A lexikografikus szélességi bejáráskor viszont mindig az a csúcs a következőnek, amelyik lexikografikusan értelemben legjobban kapcsolódik a korábban sorba rendezett csúcshalmazhoz.

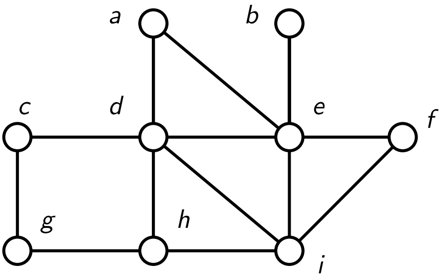
Lássunk egy példát!

# Lexikografikus BFS példa



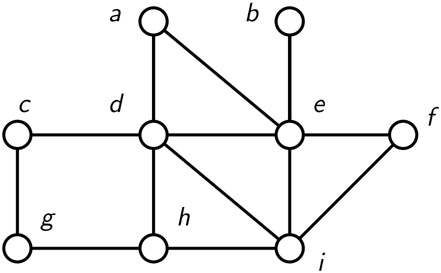

Nini: egy $G$ inputgráf.

# Lexikografikus BFS példa



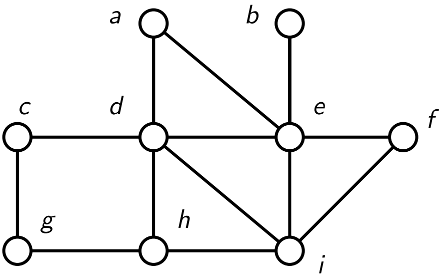

Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.

# Lexikografikus BFS példa



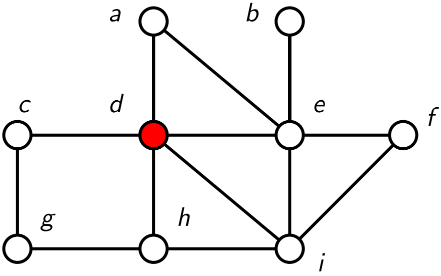

Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.
Ezért a feljegyzett sorszámok:
$a : \emptyset$, $b : \emptyset$, $c : \emptyset$, $d : \emptyset$, $e : \emptyset$, $f : \emptyset$, $g : \emptyset$, $h : \emptyset$, $i : \emptyset$

# Lexikografikus BFS példa



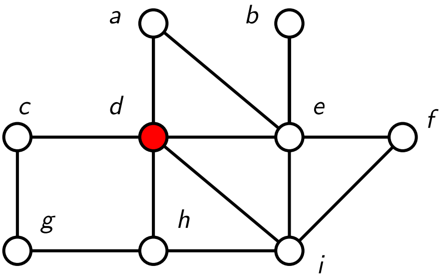

Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.
Ezért a feljegyzett sorszámok:
$a : \emptyset$, $b : \emptyset$, $c : \emptyset$, $d : \emptyset$, $e : \emptyset$, $f : \emptyset$, $g : \emptyset$, $h : \emptyset$, $i : \emptyset$
A $d$ csúcsot választjuk, de választhatnánk bármelyik másikat is.

# Lexikografikus BFS példa



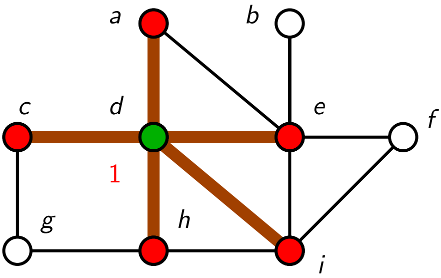

Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.
Ezért a feljegyzett sorszámok:
$a:\emptyset$, $b:\emptyset$, $c:\emptyset$, $d:\emptyset$, $e:\emptyset$, $f:\emptyset$, $g:\emptyset$, $h:\emptyset$, $i:\emptyset$
A $d$ csúcsot választjuk, de választhatnánk bármelyik másikat is.

# Lexikografikus BFS példa



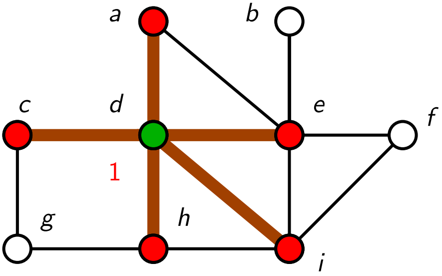

Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.
Ezért a feljegyzett sorszámok:
$a:\emptyset$, $b:\emptyset$, $c:\emptyset$, $d:\emptyset$, $e:\emptyset$, $f:\emptyset$, $g:\emptyset$, $h:\emptyset$, $i:\emptyset$
A $d$ csúcsot választjuk, de választhatnánk bármelyik másikat is.
A $d$ eléretlen szomszédait elérjük, $d$-t elsőként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

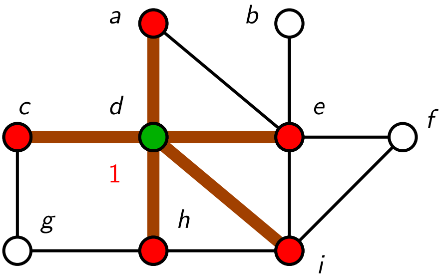



Nini: egy $G$ inputgráf.
Egyelőre a befejezett csúcsok sorrendje üres.
Ezért a feljegyzett sorszámok:
$a : \emptyset$, $b : \emptyset$, $c : \emptyset$, $d : \emptyset$, $e : \emptyset$, $f : \emptyset$, $g : \emptyset$, $h : \emptyset$, $i : \emptyset$
A $d$ csúcsot választjuk, de választhatnánk bármelyik másikat is.
A $d$ eléretlen szomszédait elérjük, $d$-t elsőként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa



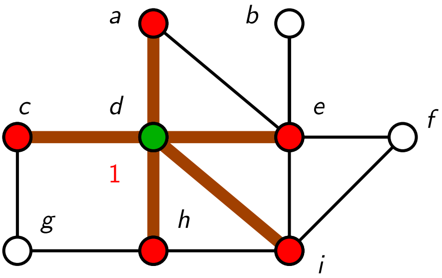
# Lexikografikus BFS példa




A feljegyzett sorszámok:

$$a:1,\ b:\emptyset,\ c:1,\ e:1,\ f:\emptyset,\ g:\emptyset,\ h:1,\ i:1$$

# Lexikografikus BFS példa



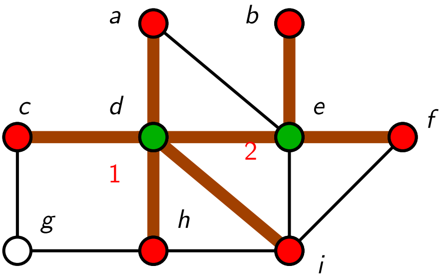

A feljegyzett sorszámok:

$$a : 1,\ b : \emptyset,\ c : 1,\ e : 1,\ f : \emptyset,\ g : \emptyset,\ h : 1,\ i : 1$$

Az $e$ csúcsot választjuk, de választhatnánk másikat is.

Az $e$ eléretlen szomszédait elérjük, $e$-t másodikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa



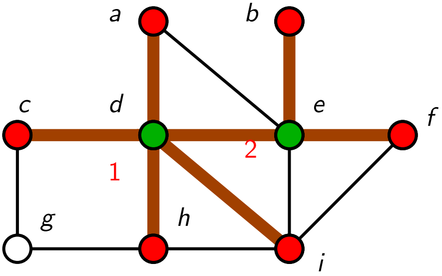

A feljegyzett sorszámok:

$$a:1,\ b:\emptyset,\ c:1,\ e:1,\ f:\emptyset,\ g:\emptyset,\ h:1,\ i:1$$

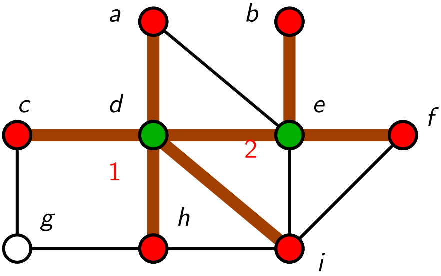
Az $e$ csúcsot választjuk, de választhatnánk másikat is.

Az $e$ eléretlen szomszédait elérjük, $e$-t másodikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa



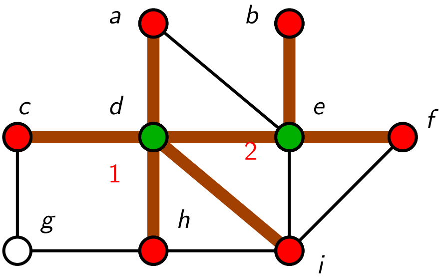
# Lexikografikus BFS példa




A feljegyzett sorszámok:

$$a : 1,2,\ b : 2,\ c : 1,\ f : 2,\ g : \emptyset,\ h : 1,\ i : 1,2$$

# Lexikografikus BFS példa



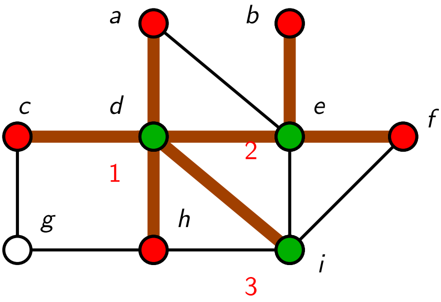

A feljegyzett sorszámok:

$$a : 1,2,\ b : 2,\ c : 1,\ f : 2,\ g : \emptyset,\ h : 1,\ i : 1,2$$

Az $i$ csúcsot választjuk, de választhatnánk $a$-t is.

Az $i$ eléretlen szomszédait elérjük, $i$-t harmadikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa



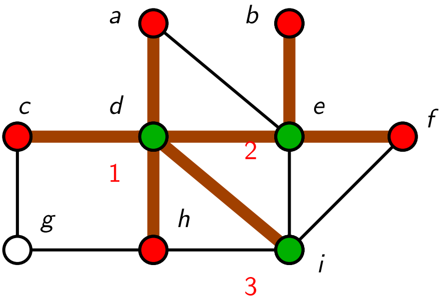

A feljegyzett sorszámok:

$$a : 1, 2,\ b : 2,\ c : 1,\ f : 2,\ g : \emptyset,\ h : 1,\ i : 1, 2$$

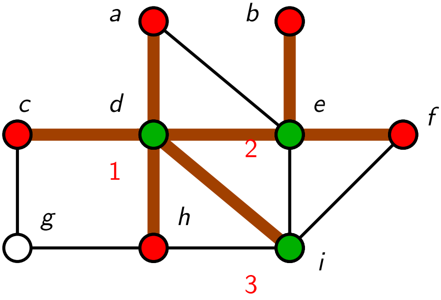
Az $i$ csúcsot választjuk, de választhatnánk $a$-t is.

Az $i$ eléretlen szomszédait elérjük, $i$-t harmadikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

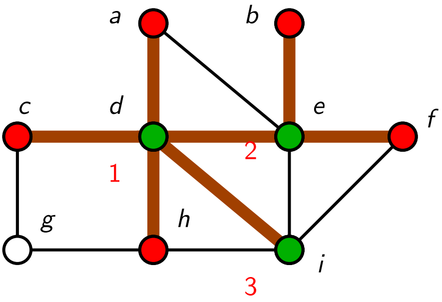


# Lexikografikus BFS példa



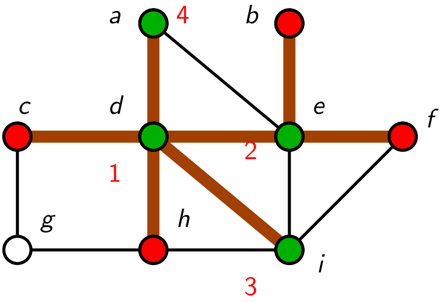

A feljegyzett sorszámok: $a : 1, 2$, $b : 2$, $c : 1$, $f : 2, 3$, $g : \emptyset$, $h : 1$

# Lexikografikus BFS példa



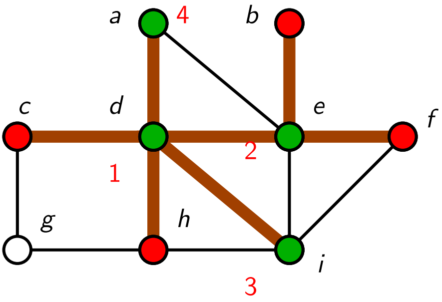

A feljegyzett sorszámok: $a:1,2$, $b:2$, $c:1$, $f:2,3$, $g:\emptyset$, $h:1$
Kötelezően az $a$ csúcsot választjuk, mást nem választhatunk.
Az $a$ eléretlen szomszédait elérjük, $a$-t negyedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

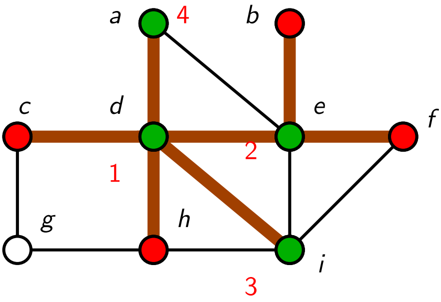



A feljegyzett sorszámok: $a : 1, 2$, $b : 2$, $c : 1$, $f : 2, 3$, $g : \emptyset$, $h : 1$
Kötelezően az $a$ csúcsot választjuk, mást nem választhatunk.
Az $a$ eléretlen szomszédait elérjük, $a$-t negyedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

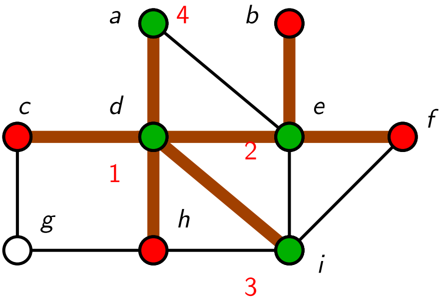


# Lexikografikus BFS példa




A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $c : 1$, $f : 2, 3$, $g : \emptyset$, $h : 1$

# Lexikografikus BFS példa

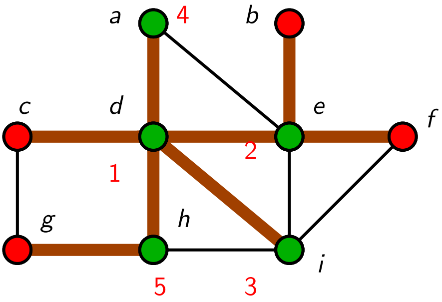



A feljegyzett sorszámok: $b:2$, $c:1$, $f:2,3$, $g:\emptyset$, $h:1$

A $h$ csúcsot választjuk, de választhatnánk $c$-t is.

A $h$ eléretlen szomszédait elérjük, $h$-t ötödikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

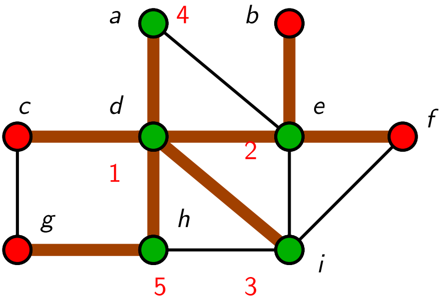



A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $c : 1$, $f : 2, 3$, $g : \emptyset$, $h : 1$

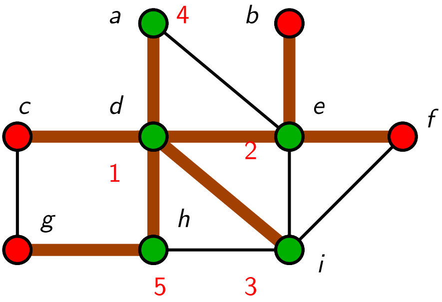
A $h$ csúcsot választjuk, de választhatnánk $c$-t is.

A $h$ eléretlen szomszédait elérjük, $h$-t ötödikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

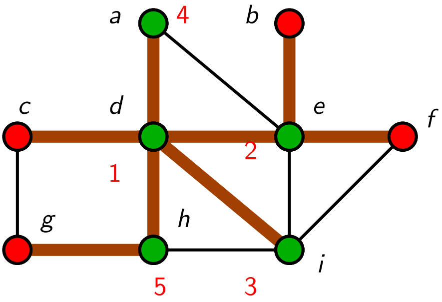


# Lexikografikus BFS példa



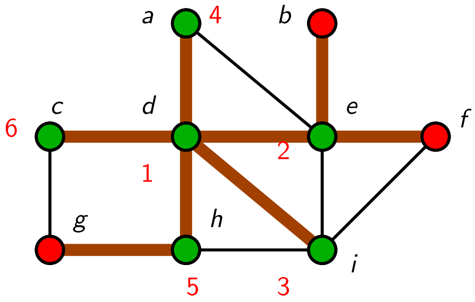

A feljegyzett sorszámok: $b:2$, $c:1$, $f:2,3$, $g:5$

# Lexikografikus BFS példa



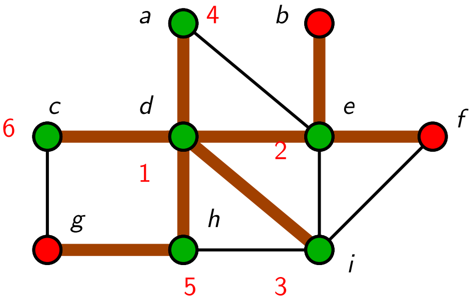

A feljegyzett sorszámok: $b:2$, $c:1$, $f:2,3$, $g:5$
Muszáj a $c$ csúcsot választanunk.
A $c$ eléretlen szomszédait elérjük, $c$-t hatodikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

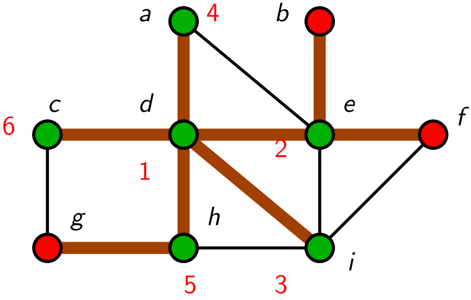



A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $c : 1$, $f : 2, 3$, $g : 5$
Muszáj a $c$ csúcsot választanunk.
A $c$ eléretlen szomszédait elérjük, $c$-t hatodikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

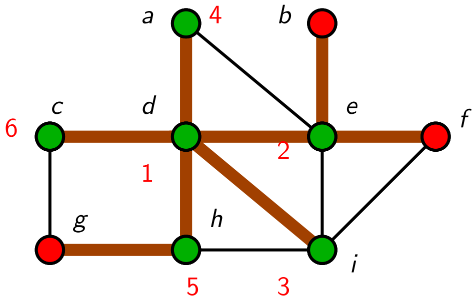


# Lexikografikus BFS példa



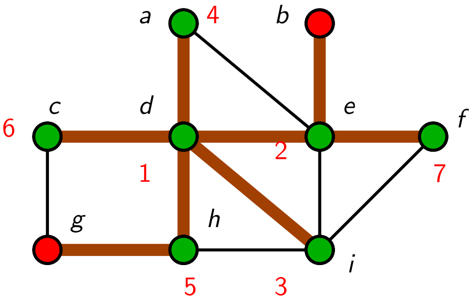

A feljegyzett sorszámok: $b$ : 2, $f$ : 2, 3, $g$ : 5, 6

# Lexikografikus BFS példa



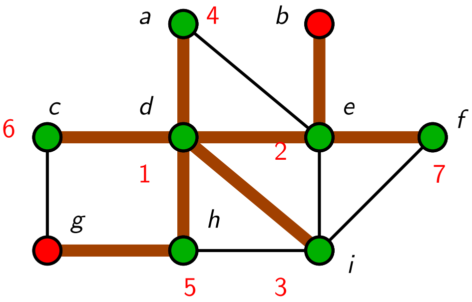

A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $f : 2, 3$, $g : 5, 6$
Kötelezően az $f$ csúcsot választjuk.
Az $f$ eléretlen szomszédait elérjük, $f$-et hetedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

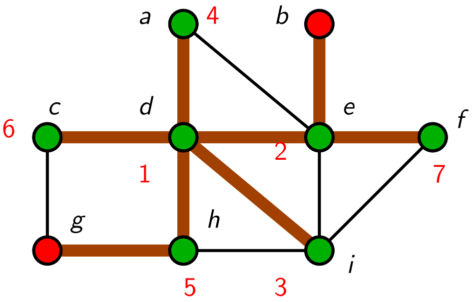



A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $f : 2, 3$, $g : 5, 6$
Kötelezően az $f$ csúcsot választjuk.
Az $f$ eléretlen szomszédait elérjük, $f$-et hetedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

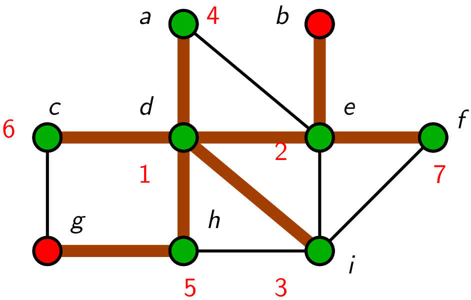


# Lexikografikus BFS példa



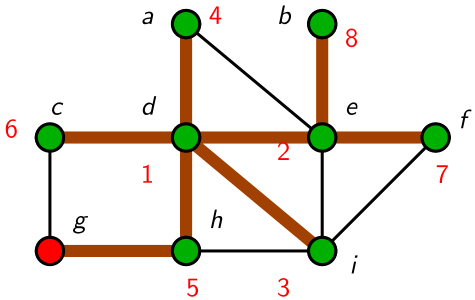

A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $g : 5, 6$

# Lexikografikus BFS példa




A feljegyzett sorszámok: $b : 2$, $g : 5, 6$
Muszáj a $b$ csúcsot választanunk.
A $b$ eléretlen szomszédait elérjük, $b$-t nyolcadikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

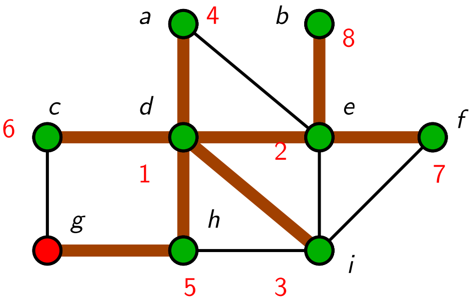



A feljegyzett sorszámok: $b:2$, $g:5,6$

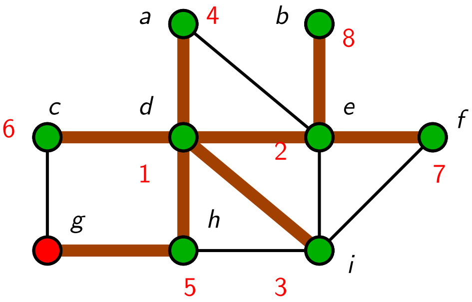
Muszáj a $b$ csúcsot választanunk.

A $b$ eléretlen szomszédait elérjük, $b$-t nyolcadikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

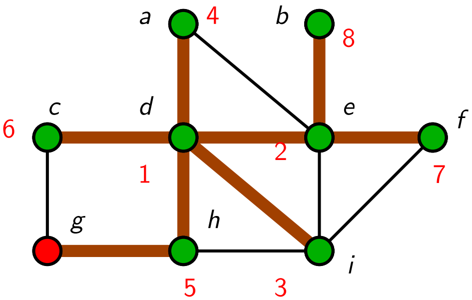


# Lexikografikus BFS példa




A feljegyzett sorszámok: $g : 5, 6$

# Lexikografikus BFS példa

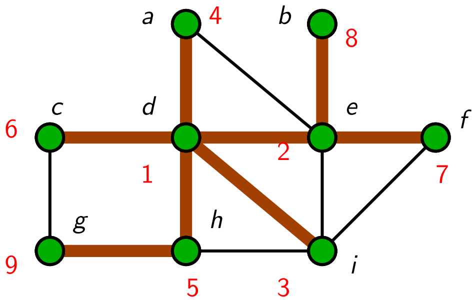



A feljegyzett sorszámok: $g : 5, 6$

Egyedüli lehetőségként a $g$ csúcsot választjuk.

A $g$ eléretlen szomszédait elérjük, $g$-t kilencedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

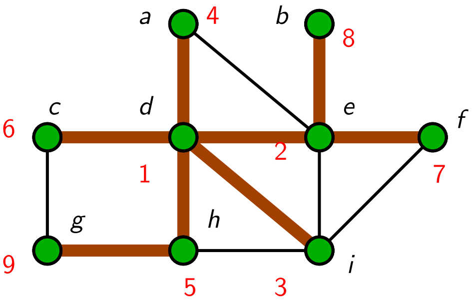



A feljegyzett sorszámok: $g : 5, 6$

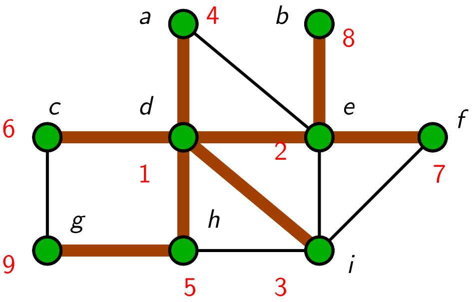
Egyedüli lehetőségként a $g$ csúcsot választjuk.

A $g$ eléretlen szomszédait elérjük, $g$-t kilencedikként befejezzük.

# Lexikografikus BFS példa

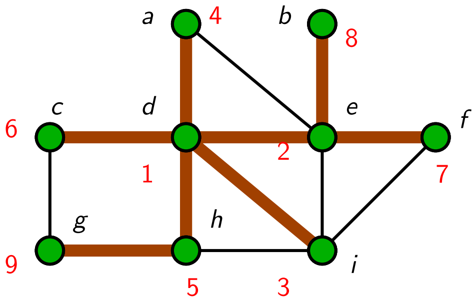


# Lexikografikus BFS példa




Győztünk!

# Lexikografikus BFS példa




Győztünk!

Nézzünk meg most közelebbről egy érdekes gráfosztályt!

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha $U$ független, $V$ klikk $G$-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha $V$ elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha $U$ független, $V$ klikk $G$-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha $V$ elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

**Megf:** (1) Minden splitgráf és intervallumgráf merevkörű.
(2) Merevkörű gráfból csúcsot törölve vagy abban élt összehúzva merevkörű gráfot kapunk. (Merevkörű gráf minorjai merevkörűek.)

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha $U$ független, $V$ klikk $G$-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha $V$ elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

**Megf:** (1) Minden splitgráf és intervallumgráf merevkörű.
(2) Merevkörű gráfból csúcsot törölve vagy abban élt összehúzva merevkörű gráfot kapunk. (Merevkörű gráf minorjai merevkörűek.)

**Biz:** (1): Ha $C$ a $G = (U \cup V, E)$ splitgráf egy legalább 4 csúcsot tartalmazó köre, akkor vagy van $C$-nek három $V$-beli csúcsa vagy két, $C$-ben nemszomszédos $V$-beli csúcsa. Mindkét esetben van $C$-nek húrja.
Ha néhány csúcs egy $G$ intervallumgráfban legalább 3-élű utat feszít, akkor a csúcsoknak megfelelő intervallumok egymáshoz csatlakozó láncot alkotnak. Nincs olyan intervallum, ami a lánc első és utolsó intervallumát metszi, a középsőket nem, ezért nem feszíthet kört legalább 4 intervallum $G$-ben.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha $U$ független, $V$ klikk $G$-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha $V$ elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

**Megf:** (1) Minden splitgráf és intervallumgráf merevkörű.
(2) Merevkörű gráfból csúcsot törölve vagy abban élt összehúzva merevkörű gráfot kapunk. (Merevkörű gráf minorjai merevkörűek.)

**Biz:**

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
A $G = (U \cup V, E)$ gráf **splitgráf**, ha $U$ független, $V$ klikk $G$-ben.
A $G = (V, E)$ gráf **intervallumgráf**, ha $V$ elemei intervallumok, élei pedig pontosan a metsző intervallumok között futnak.

**Megf:** (1) Minden splitgráf és intervallumgráf merevkörű.
(2) Merevkörű gráfból csúcsot törölve vagy abban élt összehúzva merevkörű gráfot kapunk. (Merevkörű gráf minorjai merevkörűek.)

**Biz:** (2): Csúcstörlés utáni feszített részgráfok a csúcstörlés előtt is feszített részgráfok voltak.
Ha élösszhúzás után néhány csúcs legalább 4-csúcsú $C$ kört feszít, akkor az élösszehúzás előtti gráfban $C$ őse szintén egy legalább 4-csúcsú feszített kör. $\square$

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

**Megf:** Ha $G$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

**Megf:** Ha $G$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.

**Biz:** Legyen $C$ a $G$ egy legalább 4 élből álló köre, $v$ pedig a $C$ első csúcsa a szimpliciális sorrendben. A sorrend szimplicialitása miatt $v$-nek a $C$ körön fekvő szomszédai össze vannak kötve egymással. Tehát $C$-nek van húrja, $G$ csakugyan merevkörű. $\square$

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

**Megf:** Ha $G$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

**Megf:** Ha $G$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.
Igazoljuk a fenti megfigyelés megfordítását, vagyis azt, hogy minden merevkörű gráfnak van szimpliciális sorrendje. Ebből például az is következik, hogy minden merevkörű gráf megkapható egyetlen csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy újabb csúcsot adunk a gráfhoz, és azt a korábban felépített gráf egy klikkjének csúcsaival kötjük össze.

# Merevkörű gráfok

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf **merevkörű** (chordal), ha nem feszít 3-nál hosszabb kört, azaz minden ilyen körének van húrja.
$G$ egy $v$ csúcsa **szimpliciális**, ha $v$ szomszédai klikket alkotnak.
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $G$ gráf csúcsainak **szimpliciális sorrendje**, ha $v_i$ szimpliciális csúcsa a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ által feszített gráfnak $\forall$ $i$-re.

**Megf:** Ha $G$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.
Igazoljuk a fenti megfigyelés megfordítását, vagyis azt, hogy minden merevkörű gráfnak van szimpliciális sorrendje. Ebből például az is következik, hogy minden merevkörű gráf megkapható egyetlen csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy újabb csúcsot adunk a gráfhoz, és azt a korábban felépített gráf egy klikkjének csúcsaival kötjük össze.

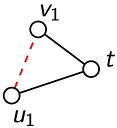
**Tétel:** Ha $G$ merevkörű, akkor $G$ tetszőleges lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

A bizonyítás elég trükkös, ezért új lapot nyitunk hozzá.

# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje

**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

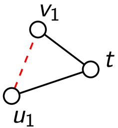
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk: tfh egy lexBFS befejezési sorrendben a $t$ csúcs $t$-t megelőző szomszédai nem alkotnak klikket, azaz $u_1t, v_1t \in E$ de $u_1v_1 \notin E$, és ezen csúcsok sorrendje $u_1, v_1, t$. Válasszuk a lexBFS befejezési sorrendben lexikografikusan minimális ilyen tulajdonságú $u_1, v_1, t$ hármast.

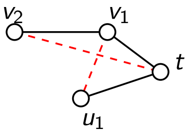
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk: tfh egy lexBFS befejezési sorrendben a $t$ csúcs $t$-t megelőző szomszédai nem alkotnak klikket, azaz $u_1t, v_1t \in E$ de $u_1v_1 \notin E$, és ezen csúcsok sorrendje $u_1, v_1, t$. Válasszuk a lexBFS befejezési sorrendben lexikografikusan minimális ilyen tulajdonságú $u_1, v_1, t$ hármast. Mivel $v_1$ megelőzi $t$-t és $u_1t \in E$, ezért $v_1$-nek van olyan $u_1$-et megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $t$-nek. Legyen $v_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Így a $v_2$-t megelőző csúcsok ugyanúgy kapcsolódnak $t$-hez mint $v_1$-hez.

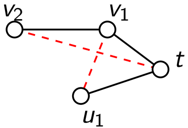
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk: tfh egy lexBFS befejezési sorrendben a $t$ csúcs $t$-t megelőző szomszédai nem alkotnak klikket, azaz $u_1t, v_1t \in E$ de $u_1v_1 \notin E$, és ezen csúcsok sorrendje $u_1, v_1, t$. Válasszuk a lexBFS befejezési sorrendben lexikografikusan minimális ilyen tulajdonságú $u_1, v_1, t$ hármast. Mivel $v_1$ megelőzi $t$-t és $u_1t \in E$, ezért $v_1$-nek van olyan $u_1$-et megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $t$-nek. Legyen $v_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Így a $v_2$-t megelőző csúcsok ugyanúgy kapcsolódnak $t$-hez mint $v_1$-hez.

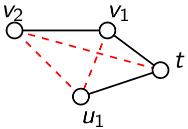
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk: tfh egy lexBFS befejezési sorrendben a $t$ csúcs $t$-t megelőző szomszédai nem alkotnak klikket, azaz $u_1 t, v_1 t \in E$ de $u_1 v_1 \notin E$, és ezen csúcsok sorrendje $u_1, v_1, t$. Válasszuk a lexBFS befejezési sorrendben lexikografikusan minimális ilyen tulajdonságú $u_1, v_1, t$ hármast. Mivel $v_1$ megelőzi $t$-t és $u_1 t \in E$, ezért $v_1$-nek van olyan $u_1$-et megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $t$-nek. Legyen $v_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Így a $v_2$-t megelőző csúcsok ugyanúgy kapcsolódnak $t$-hez mint $v_1$-hez.
$G$ merevkörű, ezért $u_1 t v_1 v_2$ nem feszíthet $C_4$-et, így $u_1 v_2 \notin E$.

# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje

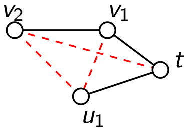



**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Indirekt bizonyítunk: tfh egy lexBFS befejezési sorrendben a $t$ csúcs $t$-t megelőző szomszédai nem alkotnak klikket, azaz $u_1t, v_1t \in E$ de $u_1v_1 \notin E$, és ezen csúcsok sorrendje $u_1, v_1, t$. Válasszuk a lexBFS befejezési sorrendben lexikografikusan minimális ilyen tulajdonságú $u_1, v_1, t$ hármast. Mivel $v_1$ megelőzi $t$-t és $u_1t \in E$, ezért $v_1$-nek van olyan $u_1$-et megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $t$-nek. Legyen $v_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Így a $v_2$-t megelőző csúcsok ugyanúgy kapcsolódnak $t$-hez mint $v_1$-hez.

$G$ merevkörű, ezért $u_1tv_1v_2$ nem feszíthet $C_4$-et, így $u_1v_2 \notin E$.

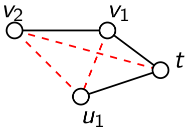
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:**

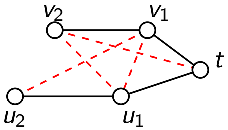
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Mivel $u_1$ megelőzi $v_1$-et és $v_1 v_2 \in E$, ezért $u_1$-nek van olyan $v_2$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $v_1$-nek. Legyen $u_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Minden $u_2$-t megelőző csúcs ugyanúgy kapcsolódik $u_1$-hez mint $v_1$-hez.

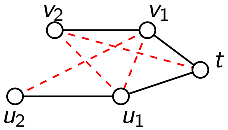
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Mivel $u_1$ megelőzi $v_1$-et és $v_1 v_2 \in E$, ezért $u_1$-nek van olyan $v_2$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $v_1$-nek. Legyen $u_2$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Minden $u_2$-t megelőző csúcs ugyanúgy kapcsolódik $u_1$-hez mint $v_1$-hez.

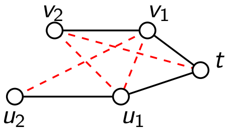
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:**

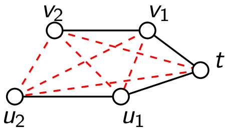
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Ha $u_2 t \in E$, akkor az $u_2, v_1, t$ hármast választottuk volna $u_1, v_1, t$ helyett. Ezért $u_2 t \notin E$. Ha $u_2 v_2 \in E$, akkor $u_2, u_1, t, v_1, v_2$ $C_5$-öt feszít, ami ellentmond a merevkörűségnek. Ezek szerint az $u_2, v_2, u_1, v_1, t$ csúcsok az $u_2 u_1 t v_1 v_2 t$ utat feszítik.

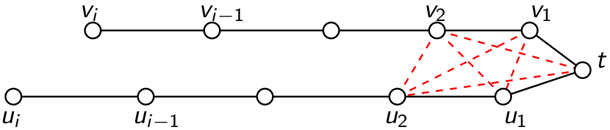
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Ha $u_2 t \in E$, akkor az $u_2, v_1, t$ hármast választottuk volna $u_1, v_1, t$ helyett. Ezért $u_2 t \notin E$. Ha $u_2 v_2 \in E$, akkor $u_2, u_1, t, v_1, v_2$ $C_5$-öt feszít, ami ellentmond a merevkörűségnek. Ezek szerint az $u_2, v_2, u_1, v_1, t$ csúcsok az $u_2 u_1 t v_1 v_2 t$ utat feszítik.

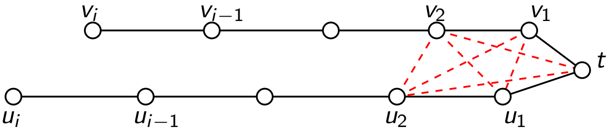
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek).

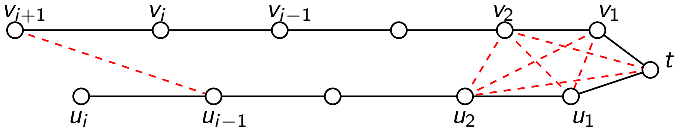
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd.

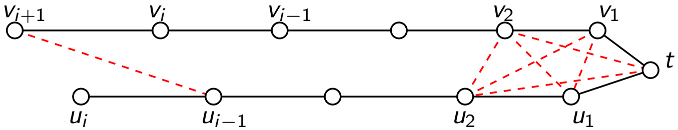
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd.

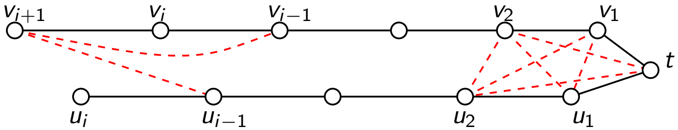
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$.

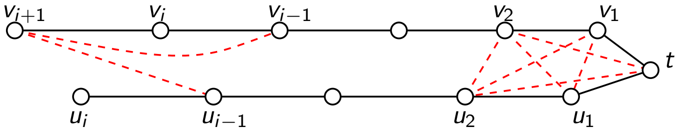
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G=(V,E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1}\ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$.

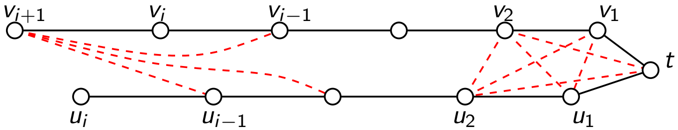
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$. Hasonlóan: $v_{i+1}$ megelőzi $u_{i-1}$-et ezért ugyanúgy kapcsolódik $v_{i-1}$-hez mint $u_{i-2}$-höz: $v_{i+1}u_{i-2} \notin E$.

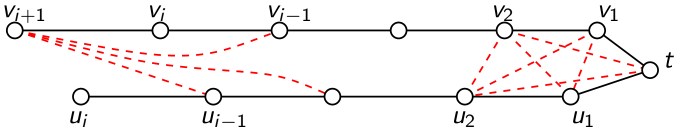
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \dots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \dots u_1 t v_1 v_2 \dots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$. Hasonlóan: $v_{i+1}$ megelőzi $u_{i-1}$-et ezért ugyanúgy kapcsolódik $v_{i-1}$-hez mint $u_{i-2}$-höz: $v_{i+1}u_{i-2} \notin E$.

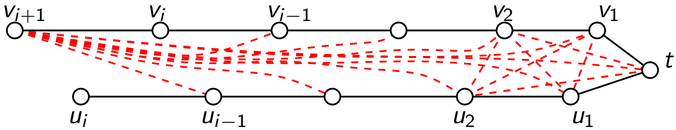
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$. Hasonlóan: $v_{i+1}$ megelőzi $u_{i-1}$-et ezért ugyanúgy kapcsolódik $v_{i-1}$-hez mint $u_{i-2}$-höz: $v_{i+1}u_{i-2} \notin E$. Ugyanígy adódik, hogy $v_{i+1}$ nem szomszédos a korábbi $u_j, v_j$ csúcsok egyikével és $t$-vel sem.

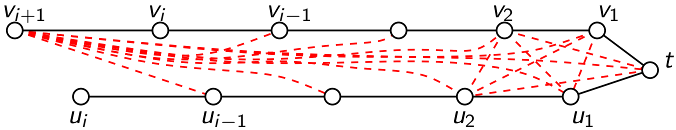
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Most tfh az $(u_i), v_i, u_{i-1}, \ldots u_1, v_1, t$ csúcsok az $(u_i)u_{i-1} \ldots u_1 t v_1 v_2 \ldots v_i$ utat feszítik, és minden $j$-re $v_j$ $(u_j)$ a sorrendben első olyan szomszédja $v_{j-1}$-nek ($u_{j-1}$-nek), ami nem szomszédja $u_{j-1}$-nek ($v_j$-nek). Mivel $u_i$ megelőzi $v_i$-t és $u_i u_{i-1} \in E$, ezért $v_i$-nek van olyan $u_i$-t megelőző szomszédja, ami nem szomszédja $u_{i-1}$-nek. Legyen $v_{i+1}$ a sorrendben első ilyen szomszéd. Mivel $v_{i+1}$ megelőzi $v_i$-t ezért ugyanúgy kapcsolódik $u_{i-1}$-hez mint $v_{i-1}$-hez: $v_{i+1}v_{i-1} \notin E$. Hasonlóan: $v_{i+1}$ megelőzi $u_{i-1}$-et ezért ugyanúgy kapcsolódik $v_{i-1}$-hez mint $u_{i-2}$-höz: $v_{i+1}u_{i-2} \notin E$. Ugyanígy adódik, hogy $v_{i+1}$ nem szomszédos a korábbi $u_j, v_j$ csúcsok egyikével és $t$-vel sem.

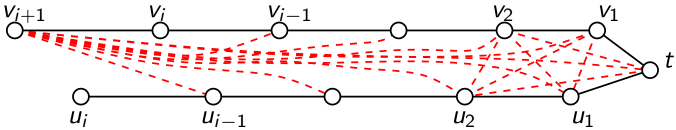
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:**

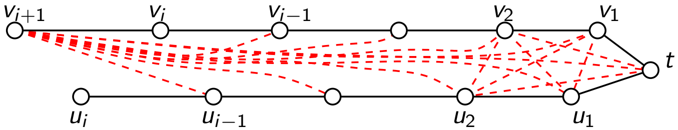
# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Ha most $v_{i+1}u_i \in E$, akkor a vizsgált csúcsok kört feszítenek, ami ellentmondás, hisz $G$ merevkörű. Ha pedig $v_{i+1}u_i \notin E$, akkor folytathatjuk az építkezést $u_{i+1}$-gyel. Mivel $G$ véges, ezért ez nem tarthat örökké: előbb-utóbb ellentmondásra jutunk. Ez a kezdeti feltevés hamis voltát igazolja, tehát a lexikografikus BFS befejezési sorrendjének megfordítása a $G$ merevkörű gráfnak bizonyosan szimpliciális sorrendje. $\square$

# Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendje




**Tétel:** Ha $G = (V, E)$ merevkörű, akkor $G$ bmely lexikografikus BFS bejárásának befejezési sorrendje fordított szimpliciális sorrend.

**Biz:** Ha most $v_{i+1}u_i \in E$, akkor a vizsgált csúcsok kört feszítenek, ami ellentmondás, hisz $G$ merevkörű. Ha pedig $v_{i+1}u_i \notin E$, akkor folytathatjuk az építkezést $u_{i+1}$-gyel. Mivel $G$ véges, ezért ez nem tarthat örökké: előbb-utóbb ellentmondásra jutunk. Ez a kezdeti feltevés hamis voltát igazolja, tehát a lexikografikus BFS befejezési sorrendjének megfordítása a $G$ merevkörű gráfnak bizonyosan szimpliciális sorrendje. $\square$

**Megj:** A fenti bizonyításnál valamivel küzdelmesebben az is igazolható, hogy ha $G$ merevkörű, akkor $G$ tetszőleges maxvissza sorrendje is fordított szimpliciális sorrendje $G$-nek.

# Merevkörű gráfok listaszínezése

**Tétel:** Ha $G$ merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz $G$ listaszínezési száma megegyezik $G$ maximális klikkméretével.

# Merevkörű gráfok listaszínezése

**Tétel:** Ha $G$ merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz $G$ listaszínezési száma megegyezik $G$ maximális klikkméretével.

**Köv:** Ha $G$ merevkörű, akkor
(1) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G) = \omega(G)$, így $\chi(G) = \omega(G)$.
(2) $G$ minden f. részgráfja is merevkörű, így (1) miatt $G$ perfekt.

# Merevkörű gráfok listaszínezése

**Tétel:** Ha $G$ merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \omega(G)$, azaz $G$ listaszínezési száma megegyezik $G$ maximális klikkméretével.

**Köv:** Ha $G$ merevkörű, akkor
(1) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G) = \omega(G)$, így $\chi(G) = \omega(G)$.
(2) $G$ minden f. részgráfja is merevkörű, így (1) miatt $G$ perfekt.

**Tétel biz:** Az $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G)$ egyenlőtlenség triviális, ezért csak $\chi_\ell(G) \leq \omega(G)$ teljesüléség kell igazolni.
Legyenek megadva $G$ minden csúcsához $\omega(G)$ méretű színlisták, és mohón színezünk $G$ egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjében.
Mivel fordított szimpliciális sorrendben dolgozunk, tetsz $v_i$ színezésekor a $v_i$ már megszínezett szomszédai $v_i$-vel együtt egy legfejebb $\omega(G)$ méretű klikket alkotnak. Ezért a $v_i$ listájában található $\omega(G)$ lehetséges színből legfeljebb $\omega(G) - 1$ színt használtunk fel a $v_i$ korábban színezett szomszédaira, így aztán $v_i$-nek is tudunk jó színt választani. $\square$

# Merevkörű gráfok részfareprezentációja

**Tétel:** A $G$ pontosan akkor merevkörű, ha $G$ csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas $F$ fa bizonyos részfáinak, hogy $G$ két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

## Merevkörű gráfok részfareprezentációja

**Tétel:** A $G$ pontosan akkor merevkörű, ha $G$ csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas $F$ fa bizonyos részfáinak, hogy $G$ két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

**Biz:** Elégségesség.
Thf $G$ előáll az $F$ fa részfáinak metszetgráfjaként. Legyen $r$ az $F$ (tetsz. választott) gyökércsúcsa, és legyen minden $F'$ részfa gyökere az $F'$-nek az $F$ gyökeréhez legközelebbi csúcsa. Legyen $C$ a $G$ egy tetsz. köre, és legyen $v$ a kör azon csúcsa, amelyiknek megfelelő $F'$ részfa gyökere a lehető legtávolabb van $r$-től. Ekkor a $C$ körön $v$ szomszédai egymással is szomszédosak, tehát $C \cong C_3$ vagy $C$-nek van húrja. Következésképp $G$ merevkörű, így az elégségességet igazoltuk.

# Merevkörű gráfok részfareprezentációja

**Tétel:** A $G$ pontosan akkor merevkörű, ha $G$ csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas $F$ fa bizonyos részfáinak, hogy $G$ két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

**Biz:**

# Merevkörű gráfok részfareprezentációja

**Tétel:** A $G$ pontosan akkor merevkörű, ha $G$ csúcsai úgy feleltethetők meg egy alkalmas $F$ fa bizonyos részfáinak, hogy $G$ két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részfáknak van közös csúcsa.

**Biz:** Szükségesség. Feltehető, hogy $G$ összefüggő. Csúcsszám szerinti indukcióval igazoljuk, hogy minden $n$-csúcsú merevkörű gráfnak van részfareprezentációja. Az $n = 1$ eset triviális. Legyen $G$ egy $n$-csúcsú merevkörű gráf, és tfh $n - 1$ csúcsra már igazoltuk a részfareprezentáció létezést. Legyen $v$ a $G$ egy szimpliciális csúcsa, és tekintsük $(G - v)$-nek az indukciós feltevés miatt létező részfareprezentációját. Itt $v$ szomszédai pként metsző részfáknak felelnek meg, ezért ezen részfáknak van közös csúcsa. (Konkrétan az $r$-től legtávolabbi gyökerű részfa gyökere.) Erre a közös csúcsra biggyesztünk egy $\ell$ levelet, amit hozzávesszük $v$ szomszédainak részfáihoz, majd a $v$-hez tartozó részfa az egypontú $\ell$ lesz. Ezzel a $G$ gráf egy részfareprezentációját kapjuk. $\square$

# Mit tanultunk ma?

- Az SFS bejárás speciális esete a BFS bejárás. Tovább specializálva kapjuk a lexikografikus BFS-t.
- A splitgráfok és az intervallumgráfok egyaránt merevkörűek.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.
- Merevkörű gráf listaszínezési és kromatikus száma megegyezik.
- Merevkörű gráfok = részfák metszetstruktúrái

# Mit tanultunk ma?

- Az SFS bejárás speciális esete a BFS bejárás. Tovább specializálva kapjuk a lexikografikus BFS-t.
- A splitgráfok és az intervallumgráfok egyaránt merevkörűek.
- Ha $V(G)$-nek van szimpliciális sorrendje, akkor $G$ merevkörű.
- Minden merevkörű gráf csúcsainak van szimpliciális sorrendje.
- Merevkörű gráf listaszínezési és kromatikus száma megegyezik.
- Merevkörű gráfok $=$ részfák metszetstruktúrái

**Jónapot**