Gráfok és algoritmusok

Irving algoritmusa

2025. március 11.

Stabil párosítások nem páros gráfokon

Láttuk, hogy ha G tartalmazhat páratlan kört, akkor nem minden esetben van stabil párosítása. Természetes kérdés, hogy van-e olyan **hatékony** algoritmus, ami tetszőleges, preferenciákkal ellátott véges gráf input esetén vagy stabil párosítást talál, vagy igazolja, hogy nincs stabil párosítás.
Egyetlen eszközünk van, ami bizonyosan működik: az éltörlési lemma. Ha azonban ez már nem használható, akkor még lehet, hogy nagyon messze vagyunk a végső választól. Új eszközre van szükségünk: olyanra ami akkor is működik, amikor az éltörlési lemma már nem segít.

Az éltörlés célja

Miért volt hasznos az éltörlési lemma? Azért, mert úgy tudtunk élt törölni, hogy stabil párosítás nem tűnt el és nem is keletkezett. De ennél kevesebb is elég a sikerhez. Például ha úgy sikerül élt törölni, hogy nem keletkezik új stabil párosítás, akkor csak az lehet a probléma, hogy az éltörlés nyomán **minden** stabil párosítás eltűnik. Azaz, ha olyan élt törlünk, amit minden stabil párosítás tartalmaz. Hát mi éppen ezt akarjuk elkerülni.

Az éltörlés célja

Miért volt hasznos az éltörlési lemma? Azért, mert úgy tudtunk élt törölni, hogy stabil párosítás nem tűnt el és nem is keletkezett. De ennél kevesebb is elég a sikerhez. Például ha úgy sikerül élt törölni, hogy nem keletkezik új stabil párosítás, akkor csak az lehet a probléma, hogy az éltörlés nyomán **minden** stabil párosítás eltűnik. Azaz, ha olyan élt törlünk, amit minden stabil párosítás tartalmaz. Hát mi éppen ezt akarjuk elkerülni.

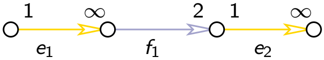
Tfh a G gráfban az éltörlési lemma alapján nem lehet élt törölni. Ekkor G rendelkezik a firstlast-tulajdonsággal:
$\forall e = uv \in E(G)$: (e $\prec_u$-legjobb) $\iff$ (e $\prec_v$-legrosszabb). Az ilyen e éleket irányítsuk u-ból v-be, és színezzük sárgára.

Kínzó kérdés: miért pont sárgára???

Válasz: mert aranyszín nincs a palettán.

Cél: sárga élek törlése úgy, hogy ennek nyomán ne keletkezzen új stabil párosítás, továbbá, ha a törlések előtt volt stabil párosítás, akkor a törléseket legalább egy túléje.

A második legjobb választás jelentése



Ha a G gráfon nem végezhető éltörlés az éltörlési lemma alapján, akkor G minden komponense vagy izolált pont, vagy két csúcsból és egy élből áll, vagy olyan, amiben minden csúcs foka legalább 2. Mivel az előbbiek triviálisak, mi az utóbbiakkal foglalkozunk.

Minden v csúcs második legjobb élét irányítsuk v-be, és színezzük szürkére.

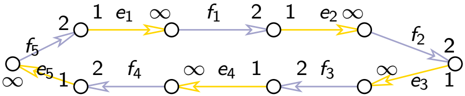
Kínzó kérdés: jó, de miért pont szürkére???

Válasz: hát azért, mert ezüstszín sincs a palettán.

Tfh e_1, f_1, e_2 egy sárga-szürke-sárga irányított út, M stabil párosítás és $e_1 \in M$. Ekkor $e_2 \in M$, különben f_1 blokkolna. Tanulság: a szürke élek implikációk. Ha egy stabil párosítás tartalmazza egy sárga-szürke-sárga irányított út első sárga élét, akkor tartalmazza a következő sárga élét is.

Megj: Nem kell e_1-nek utolsónak lennie, elég, ha f_1 jobb e_1-nél.

Rotációk

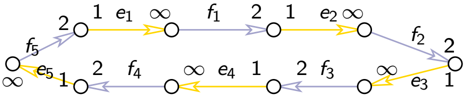


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

Rotációk

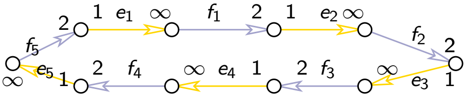


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
   Biz: $e_i \in M \Rightarrow e_{i+1} \in M \Rightarrow \ldots \Rightarrow e_{i-1} \in M$.

Rotációk



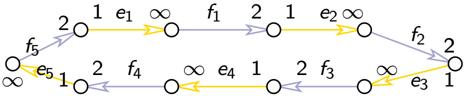
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

   Biz: $e_i \in M \Rightarrow e_{i+1} \in M \Rightarrow \ldots \Rightarrow e_{i-1} \in M$.
   Ha $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$, akkor $e_1, e_2, \ldots, e_k$ párosítás, és $f_1, f_2, \ldots, f_k$ is a G egy ugyanezen csúcsokat fedő párosítása. Így M' is párosítás, amit egyetlen e_i él sem blokkol. Ha egy g él blokkolná M'-t, akkor sárga él töve nem csúcsa g-nek. Mivel minden más csúcsban a szürke élek jobbak a sárgáknál, a g él M-et is blokkolja, ami ellentmondás. Tehát M' is stabil G-ben. $\square$

Rotációk

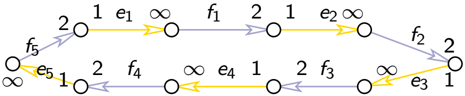


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)

Rotációk

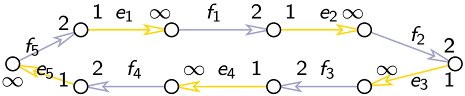


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

Rotációk

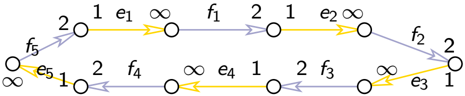


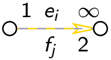
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk



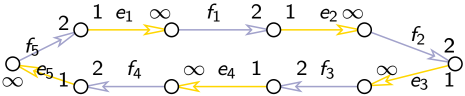


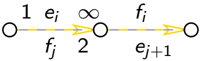
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk



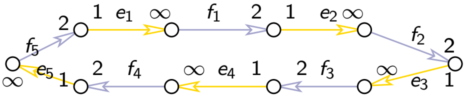


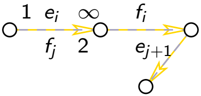
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk



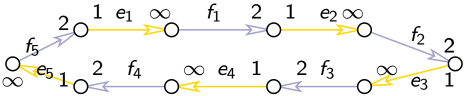


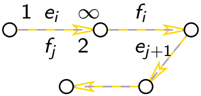
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





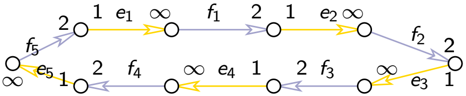
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

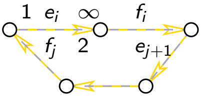
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





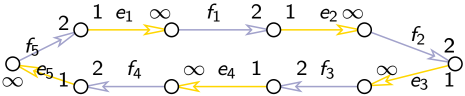
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

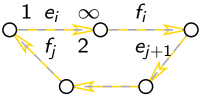
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.

Rotációk





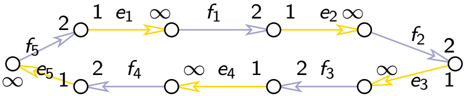
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

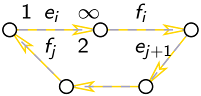
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

   Biz: Az e_i végpontja másodfokú, ezért a rotációban következő élek is megegyeznek.
   Ezért a sárga-szürke élek egy C kört alkotnak. Ez a C kör nem lehet páros hosszú. Ráadásul C minden csúcsa másodfokú G-ben, azaz C a G egy komponense. □

Rotációk



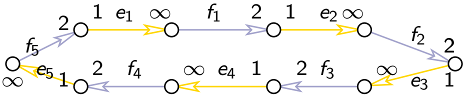


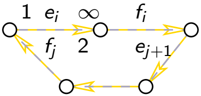
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

Rotációk



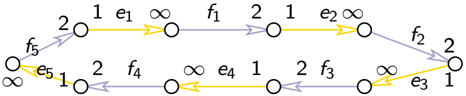


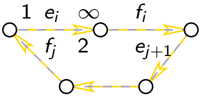
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Rotációk



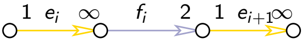


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ különbözők.

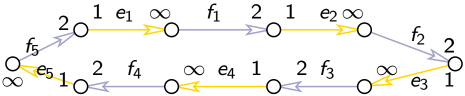
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

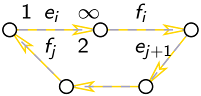
1. $(\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \dots - e_k + f_1 + \dots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \dots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \dots, e_k\} \cap \{f_1, \dots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \dots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

   Biz: Ha e_i blokkol egy törlések utáni M párosítást, akkor $f_i \notin M$. Mivel $e_{i+1} \notin M$, ezért f_i is blokkolja M-et. □



Rotációk



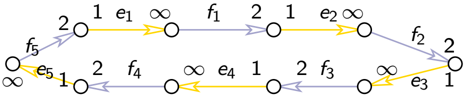


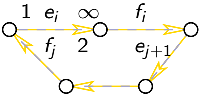
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Rotációk





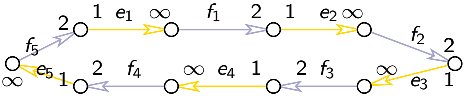
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

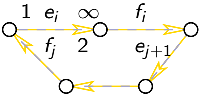
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Köv: Rotációban $\nexists$ sárga-szürke él $\Rightarrow$ sárga élek törölhetők: új stabil párosítás nem keletkezik, és ha el is tűnik stabil párosítás, lesz olyan stabil párosítás, ami túléli a törlést. $\square$

Rotációk





Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

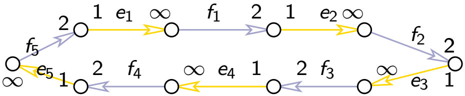
Megf: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és M stabil párosítás.

1. $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \cap M = \emptyset)$ vagy $(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq M$ és $M' = M - e_1 - \ldots - e_k + f_1 + \ldots + f_k$ is stabil párosítás.)
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen párosítás sem.

Köv: Rotációban $\nexists$ sárga-szürke él $\Rightarrow$ sárga élek törölhetők: új stabil párosítás nem keletkezik, és ha el is tűnik stabil párosítás, lesz olyan stabil párosítás, ami túléli a törlést. □

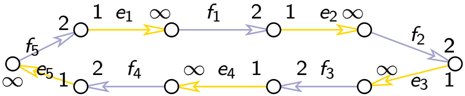
Kínzó kérdés: Mindig található rotáció? És ha igen, hogyan?

Rotációk



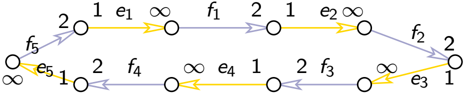
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ különbözők.

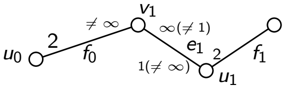
Rotációk



Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.
Állítás: Ha a G gráfban nem lehet az éltörlési lemma alapján élt törölni, és $\Delta(G) \geq 2$, akkor G tartalmaz rotációt.

Rotációk





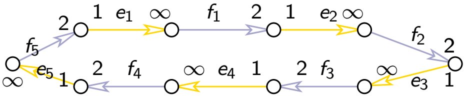
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

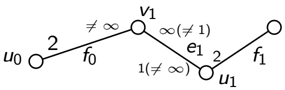
Állítás: Ha a G gráfban nem lehet az éltörlési lemma alapján élt törölni, és $\Delta(G) \geq 2$, akkor G tartalmaz rotációt.

Biz: Tfh $d(v_0) \geq 2$, és legyen $f_0 = u_0 v_1$ az u_0 2-dik legjobb éle. Mivel G-re teljesül a firstlast-tulajdonság, ezért f_0 nem lehet a v_1 legrosszabb éle. Legyen $e_1 = v_1 u_1$ a v_1 legrosszabb éle. Mivel v_1-nek nem e_1 a legjobb éle, ezért a firstlast-tulajdonság miatt u_1-nek e_1 a legjobb éle (hisz v_1-nek e_1 a legrosszabb éle) és egyúttal u_1-nek e_1 nem a legrosszabb éle, hiszen v_1-nek e_1 nem a legjobb éle. Legyen f_1 az u_1 második legjobb éle, és innen a fentiek szerint tudjuk felváltva a második legjobb és legrosszabb éleket követni.

Előbb-utóbb ciklizálni fog ez a sorozat, és rotációt találunk. $\square$

Rotációk

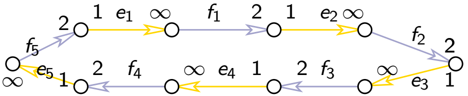


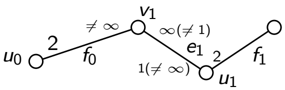


Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ különbözők.

Állítás: Ha a G gráfban nem lehet az éltörlési lemma alapján élt törölni, és $\Delta(G) \geq 2$, akkor G tartalmaz rotációt.

Rotációk



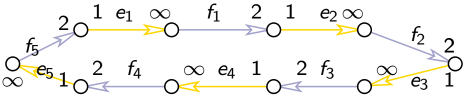


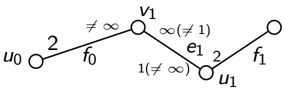
Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ különbözők.

Állítás: Ha a G gráfban nem lehet az éltörlési lemma alapján élt törölni, és $\Delta(G) \geq 2$, akkor G tartalmaz rotációt.

Megj: 1. Az iménti bizonyítás (firstlast-tulajdonságú gráf esetén) módszert is mutat rotáció keresésére: visszafelé kell követni a sárga és szürke éleket, azaz felváltva haladunk legrosszabb és 2-dik legjobb élek mentén.

Rotációk





Def: A felváltva sárga és szürke éleből álló $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ zárt, irányított élsorozat **rotáció**, ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ különbözők.

Állítás: Ha a G gráfban nem lehet az éltörlési lemma alapján élt törölni, és $\Delta(G) \geq 2$, akkor G tartalmaz rotációt.

Megj: 1. Az iménti bizonyítás (firstlast-tulajdonságú gráf esetén) módszert is mutat rotáció keresésére: visszafelé kell követni a sárga és szürke éleket, azaz felváltva haladunk legrosszabb és 2-dik legjobb élek mentén.

2. Ezzel minden szükséges eszközünk megvan ahhoz, hogy ne csak páros gráfban tudjunk hatékonyan stabil párosítást keresni.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \quad \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Megj: A fenti algoritmus felgyorsítható azzal, ha a rotáció eliminációjakor töröljuk az éltörlési lemma szerint törölhetővé vált éleket, és innentől csak a módosított 2. lépést ismételjük.
Így az 1. lépésre sosem térünk vissza.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓

Irving algoritmusa

Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓
2.2.1.: Ha volna G-nek stabil párosítása, akkor a rotációként kapott ptn pref.kör komponensnek is lenne, de nincs.↯

Irving algoritmusa

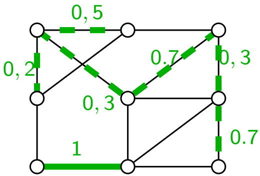
Input: $G = (V, E)$ és $\prec_v \ \ \forall v \in V$
Output: G stabil párosítása, ha van.
Működés:

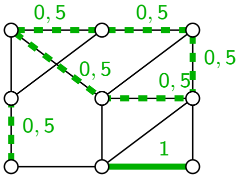
1. Az éltörlési lemma segítségével éleket törlünk, amíg lehet.
2. Ha már nem lehet élt törölni, rotációt keresünk.
   2.1 Nincs rotáció. **STOP:** a kapott gráf élei diszjunktak, és G egy stabil párosítását alkotják.
   2.2 Van rotáció.
      2.2.1 a rotáció egy sárga-szürke élekből alló páratlan kör. **STOP:** G-nek nincs stabil párosítása.
      2.2.2 a rotáció minden éle vagy sárga vagy szürke. **Elimináljuk a rotációt**: töröljük a sárga éleit.
3. GoTo 1.

Helyesség: 1.: ✓ 2.1.: Ha $\Delta(G) \geq 2$, van rotáció is. ✓
2.2.1.: Ha volna G-nek stabil párosítása, akkor a rotációként kapott ptn pref.kör komponensnek is lenne, de nincs.↯
2.2.2.: Következik az eddigiekből.✓

Tan karakterizációja

Def: A $G = (V, E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, ahol $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. **Félpárosítás** alatt $x : E \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ törtpárosítást értünk.



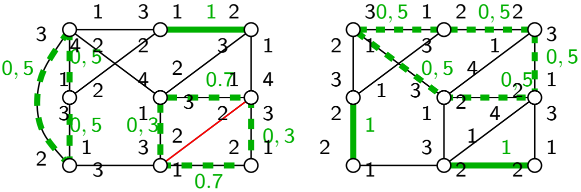


Tan karakterizációja

Def: A $G = (V, E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, ahol $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. **Félpárosítás** alatt $x : E \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ törtpárosítást értünk.

Tan karakterizációja

Def: A $G=(V,E)$ gráf **törtpárosítása** egy olyan $x:E\to\mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, ahol $\tilde{x}(E(v))\le 1$ teljesül minden $v\in V$ csúcsra.
Félpárosítás alatt $x:E\to\{0,\frac{1}{2},1\}$ törtpárosítást értünk.
Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e\in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f):f\preceq_v e)\}=1$.



Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0,1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Biz: 1. Mindent tört súlyú élt abba a csúcsba irányítunk, amelyikben a félpárosítás dominálja. Ekkor minden v csúcsba legfeljebb egy tört súlyú él mutat, és ha a v csúcsba mutat tört súlyú él, akkor legalább egy tört súlyú él ki is lép v-ből. Ezért ha egy v csúcsra illeszkedik tört súlyú él, akkor v-ből pontosan egy ilyen indul és pontosan egy ilyen lép be. A tört súlyú élek tehát pontdiszjunkt köröket alkotnak, és minden egyes ilyen körben az irányítás mentén haladva mindig jobb élre lépünk.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Biz:

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Biz: 2. Ekkor x egy olyan M párosítás karakterisztikus vektora, ami minden M-en kívüli élt dominál, vagyis M stabil párosítás. $\square$

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}$ $\forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, akkor x_1 és x_2 $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}$ $\forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, akkor x_1 és x_2 $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha x nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan kört.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, akkor x_1 és x_2 $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha x nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan kört.

Biz: $\Rightarrow$: Ha M stabil párosítás, akkor χ_M olyan stabil félpárosítás, ami nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú ptn kört. Tan tételének 2. része miatt ekkor egyetlen stabil félpárosítás sem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú ptn kört.

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0, 1\}$ $\forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, akkor x_1 és x_2 $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha x nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan kört.

Biz:

Tan karakterizációja

Def: Az x törtpárosítás **stabil**, ha minden $e \in E$ élnek van olyan v csúcsa, ahol x **dominálja** e-t, azaz $\sum\{x(f) : f \preceq_v e)\} = 1$.

Megf: Ha M a G stabil párosítása, akkor a hozzá tartozó χ_M karakterisztikus vektor stabil törtpárosítás. $\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$

Megf: Ha x a G stabil törtpárosítása, akkor

1. a tört súlyú élek diszjunkt preferenciaköröket alkotnak,
2. ha nincsenek tört súlyú élek (azaz $x(e) \in \{0,1\}\ \forall e$), akkor x a G egy stabil párosításának a karakterisztikus vektora.

Tan tétele: Tetsz $G = (V, E)$ gráf és $\prec_v$ élpreferenciák esetén

1. G-nek van stabil félpárosítása.
2. Ha x_1, x_2 a G stabil félpárosításai, akkor x_1 és x_2 $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek.

Köv: Legyen x a G stabil félpárosítása. G-nek pontosan akkor van stabil párosítása, ha x nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan kört.

Biz: $\Leftarrow$: Ha pedig egy x stabil félpárosítás nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú ptn kört, akkor x $\frac{1}{2}$ súlyú ps köreiben minden második él súlyát 1-re, minden „elsőét” pedig 0-ra módosítva egy stabil párosítás karakterisztikus vektorát kapjuk.

Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.
Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.
Biz: Hasonlóan az eredetihez. A törölt él súlya stabil törtpárosításban nem lehet pozitív, ezért stabil törtpárosítás nem tűnik el az éltörlés nyomán. Ha pedig az eredeti gráf egy x törtpárosítása nem dominálja a törölt élt, akkor x nem dominálja az éltörlés lehetőségét biztosító legjobb élt sem. Ezért éltörlés nyomán félpárosítás nem válhat stabillá. $\square$

Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.
Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

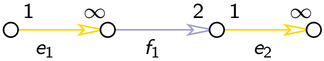
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Biz: Ha $x(e_1) = 0$, akkor az állítás triviális. Tfh $x(e_1) > 0$. Mivel x törtpárosítás, ezért $x(e_1) + x(f_1) \leq 1$. Másrészt f_1-et csak az e_2-vel közös csúcsában lehet dominálni, és ott is csak e_2 képes erre, ezért $x(f_1) + x(e_2) = 1$, így $x(e_1) \leq 1 - x(f_1) = x(e_2)$. □



Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.
Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.
Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

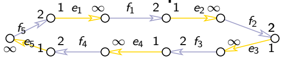
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.

Biz: Az előző Megf miatt $x(e_1) \leq x(e_2) \leq \ldots \leq x(e(k) \leq x(e_1)$, ezért végig egyenlőség áll. Így $x' = x - \lambda\chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda\chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is törtpárosítás. Ha egy e élt x a v csúcsnál dominálja, akkor könnyen látható, hogy e-t x' is v-nél dominálja, vagyis az x' törtpárosítás szintén stabil. $\square$

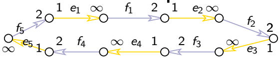
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \dots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \dots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.

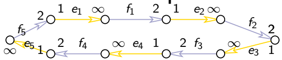
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

Biz: Korábban ezt már bizonyítottuk. $\square$

Tan karakterizációja

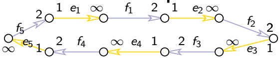
Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.

1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és



$x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.

2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.

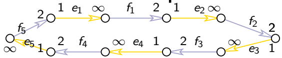
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

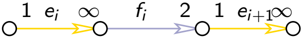
Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \dots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \dots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \dots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \dots, e_k\} \cap \{f_1, \dots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \dots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen törtpárosítás sem.

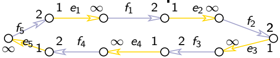
Biz: Ha a törlések utáni gráf egy x törtpárosítása nem dominálja az e_i élt, akkor $x(f_i) < 1$. Ám $x(e_{i+1}) = 0$ miatt x az f_i élt sem dominálja.



$\square$

Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.
Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.
Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.
Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen törtpárosítás sem.

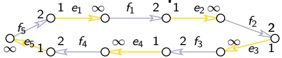
Tan karakterizációja

Tan tételének bizonyításához megfigyeléseket teszünk.

Megf: Az éltörlési lemma szerinti éltörlés hatására a stabil **tört**párosítások halmaza sem változik.

Megf: A szürke élek a törtpárosítások esetén is implikációk. Ha e_1, f_1, e_2 egy irányított sárga-szürke-sárga út, akkor $x(e_1) \leq x(e_2)$.

Köv: Tfh $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_k, f_k)$ rotáció és x stabil törtpárosítás.



1. $x(e_1) = x(e_2) = \ldots = x(e_k) = \lambda$ és $x' = x - \lambda \cdot \chi(\{e_1, \ldots, e_k\}) + \lambda \cdot \chi(\{f_1, \ldots, f_k\})$ is stabil törtpárosítás.
2. Ha $e_i = f_j$ akkor $f_i = e_{j+1}$ és az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek G egy páratlan kör-komponensét alkotják.
3. Ha $\{e_1, \ldots, e_k\} \cap \{f_1, \ldots, f_k\} = \emptyset$, akkor az $e_1, \ldots, e_k$ élek törlésétől nem válik stabillá egyetlen törtpárosítás sem.

Azt kaptuk, hogy rotáció eliminációja során nem keletkezik stabil törtpárosítás, és ha az elimináció előtt volt stabil törtpárosítás, akkor az elimináció után is marad ilyen.

Tan karakterizációja

Tan karakterizációja

„Biz” Tan tételének 1. részére: Irving algoritmusát módosítjuk: nem állunk meg, ha egy sárga-szürke ptn kör kompenst találunk. Ha már nem lehet rotációt eliminálni, akkor a sárga élek 1, a sárga-szürkék pedig $\frac{1}{2}$ súlyt kapnak. A korábbi megfigyeléseink miatt Irving algoritmusának végrehajtásakor sosem keletkezett stabil félpárosítás, és ha volt, akkor sosem tűnt el az összes. Az eljárás végén kapott gráfban a fenti x súlyfüggvény stabil félpárosítás. Ezért ha x-et úgy terjesztjük ki, hogy az algoritmus során törölt éleknek 0 súlyt adunk, akkor az eredeti gráf stabil félpárosítását kapjuk. $\square$

Azt kell még megmutatni, hogy az $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körök minden stabil félpárosításban ugyanazok. Ezen küzdünk a továbbiakban.

Tan karakterizációja

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.

Biz: Indirekt. Ha v-be mutatna piros és zöld él is, akkor e két él közül a v számára jobbikat nem v-ben dominálja az ellentétes színű félpárosítás. Ez ellentmond az irányítás definíciójának. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.

Biz: A v-be belépő éleket az ellentétes színű félpárosítás v-ben dominálja, ezért legalább annyi összértéknek kell ellentétes színen kilépnie v-ből, mint amennyi összérték oda belép. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.

Biz: Minden színes él egy csúcsba lép be, és egy csúcsból lép ki, ezért a csúcsokból kilépő élek értékösszege megegyezik a csúcsokba belépő élek értékeinek összegével. A **Megf** 2. része miatt minden v csúcsban egyenlőségnek kell állnia, és a belépő élek egyszínűek, a kilépők pedig a belépőkével ellentétes színűek. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
(Ha v-ből nem lép ki él, akkor v színtelen marad.)

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.

Biz: Indirekt. Ha C minden csúcsa színes, akkor C két szomszédos csúcsa (u és v) egyszínű. Ekkor az uv él színtelen, és az u-ba és v-be belépő színes élek rosszabbak az uv-nél. Másrészt ezek az élek uv-vel közös preferenciakörön vannak. Ellentmondás. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.
5. A fenti C-nek minden csúcsa színtelen.

Biz: Indirekt tfh u, v a C szomszédos csúcsai, v színtelen u színes. Ekkor $uv = e_1 \prec_v e_2 =$ a C (színtelen) élei. Az u-ba belépő, u-val ellentétes színű e_0 élnek e_1, e_2-vel közös preferenciakörön kéne lennie, ám $e_1 \prec_u e_0$ áll a dominálás miatt. Ellentmondás. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.
5. A fenti C-nek minden csúcsa színtelen.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.
5. A fenti C-nek minden csúcsa színtelen.
6. A fenti C x_z-nek is $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre.

Biz: **Megf** 5. miatt C minden csúcsa színtelen, ezért C minden e élére $x_z(e) = x_p(e) = \frac{1}{2}$ teljesül. $\square$

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.
5. A fenti C-nek minden csúcsa színtelen.
6. A fenti C x_z-nek is $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre.

Tan karakterizációja

Tfh x_p és x_z a G gráf stabil félpárosításai. Színezzük ki G éleit: az e él színe piros, ha $x_p(e) > x_z(e)$. Legyen e zöld, ha $x_z(e) > x_p(e)$, egyébként e színtelen. Irányítsunk minden színes élt abba a csúcsba, amelyikben az ellentétes színű félpárosítás dominálja. Legyen $s(e) = |x_p(e) - x_z(e)|$ az e él **értéke**.

Megf: 1. Ugyanabba a csúcsba nem mutat piros és zöld él is.
2. Minden v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek összértéke nem több a belépőkkel ellentétes színű, v-ből kilépő élek összértékénél.
3. Bmely v csúcsra igaz, hogy a v-be belépő élek színe különbözik a v-ből kilépő élek színétől.
Színezzük G minden v csúcsát a v-ből kilépő élek színére.
4. Ha C az x_p $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre, akkor C-nek van színtelen csúcsa.
5. A fenti C-nek minden csúcsa színtelen.
6. A fenti C x_z-nek is $\frac{1}{2}$ súlyú ptn köre.

Köv: (**Tan-tétel** 2. rész) Ha x_p, x_z a G stabil félpárosításai, akkor x_p és x_z $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan körei megegyeznek. □

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú ptn körei mindig ugyanazok.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú ptn körei mindig ugyanazok.
- Tan tétele: Irving algoritmusa stabil félpárosítást talál. Ha ez nem párosítás, akkor egyúttal bizonyítékot is szolgáltat a stabil párosítás nemlétére.

Mit tanultunk ma?

- Az éltörlési lemma működik nempáros gráfokon is.
- Mindig úgy törlünk legjobb éleket, hogy stabil párosítás ne keletkezzen, de ne is tűnjön el mind.
- A második legjobb élek implikációkat jelentenek.
- Sárga és szürke éleken mindig van rotáció. Ez vagy ptn kör (és nincs stabil párosítás), vagy a sárga élei eliminálhatók.
- Irving algoritmusa: éltörlés és rotáció-elimináció, amíg lehet.
- Stabil félpárosítások $\frac{1}{2}$ súlyú ptn körei mindig ugyanazok.
- Tan tétele: Irving algoritmusa stabil félpárosítást talál. Ha ez nem párosítás, akkor egyúttal bizonyítékot is szolgáltat a stabil párosítás nemlétére.

Ennyi az egész