Gráfok és algoritmusok

Kerekítési problémák

2025. március 25.

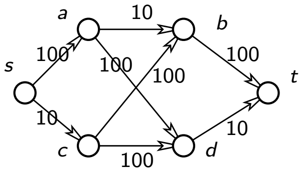
Bevezetés

Folyamismétlés, EgÉr lemma általánosítás, alkalmazások.

A hidegháború hatása a kombinatorikus optimalizálásra

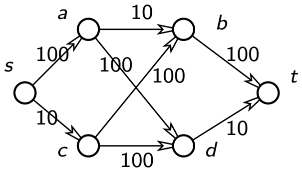
- Az 1950-es években járunk. Valódi veszélynek tűnik, hogy a szovjet hadsereg tankjai megindulnak nyugat-Európa ellen.
- A haditechnikát vasúton szállítják, ezért a vasút elleni légi támadás látszik az legalkalmasabb védekezésnek.
- A csapásmérés optimalizálásához használt gráf csúcsai a vasúti igazgatóságok, élei pedig a vasúti kapcsolatok voltak. Ismert volt az egyes vasútvonalak ezer tonnában mért kapacitása is. Ezt a gráfot kellett úgy kettévágni, hogy ne maradjon kapcsolat a szovjet támaszpontok és nyugat-Európa között.
- Egy titkos jelentésben Ford és Fulkerson olyan algoritmust írnak le, ami tetszőleges gráfon megoldja ezt a problémát: megtalál néhány vasútvonalat, melyeket elvágva a feltétel teljesül és ezen belül az összkapacitásuk a lehető legkisebb.
- Az jelentésből az is kiderül, hogy a sértetlen hálózat ugyanilyen összkapacitással képes nyugatra szállítani a hadianyagot.
- A jelentés titkosítását 1999-ben oldották fel.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)



Def: Hálózat: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)



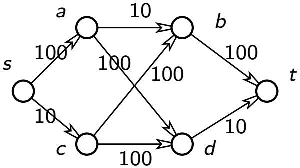
Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

Megj: (1) Az ,,eredeti" problémában s a szovjet tankok forrása (keleten), t pedig a megvédeni kívánt terület (nyugaton).

(2) Az ,,eredeti" problémában a G gráf irányítatlan, itt irányított. Később látni fogjuk, hogy az irányítatlan gráfokhoz tartozó problémák irányított gráfon is megfogalmazhatók, ezért a fenti modell általánosabb a feladatot motiválónál.

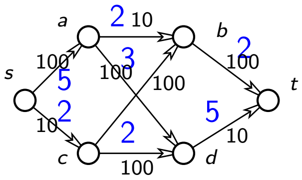
(3) Rendszerint s forrás, t pedig nyelő a folyamproblémát leíró gráfban, de ennek nem szükséges feltétlenül így lennie.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)



Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)

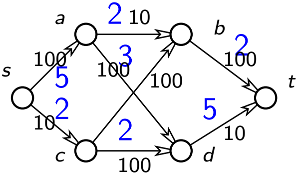


Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

st-**folyam**: olyan $z : E \to \mathbb{R}_+$ függvény, amire teljesül a **kapacitasfeltétel**, azaz $0 \leq z(e) \leq c(e) \forall e \in E$, és a **Kirchhoff-szabály**, miszerint ha a v csúcs nem terminál, akkor v-ben sem nem keletkezik, sem nem tűnik el folyam:
$\sum_{uv \in E(G)} z(uv) = \sum_{vw \in E(G)} z(vw) \quad \forall v \neq s, t.$

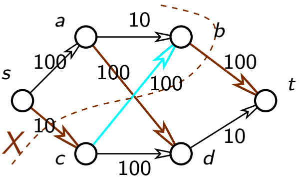
A z *st*-**folyam nagysága** az s-ből kilépő *nettó* folyammennyiség:
$m_z = \sum_{sv \in E(G)} z(sv) - \sum_{us \in E(G)} z(us).$

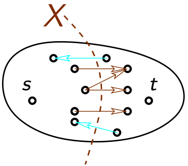
Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)



Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)





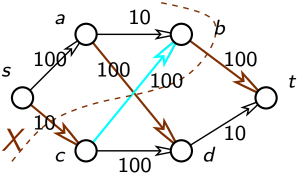
Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

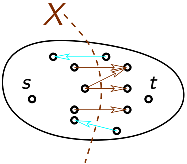
indukált *st*-vágás: $s \in X \subseteq V - t$ esetén az X és $V - X$ között futó élek halmaza.

A fenti ***st*-vágás kapacitása**: $c(X) = \sum\{c(uv) : u \in X, v \notin X\}$.

Megj: Az X által indukált *st*-vágás kapacitásába tehát csak az X-et elhagyó élek számítanak, az X-be belépők nem.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)



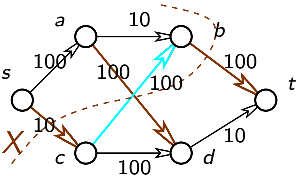


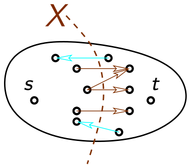
Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

indukált *st*-vágás: $s \in X \subseteq V - t$ esetén az X és $V - X$ között futó élek halmaza.

A fenti ***st*-vágás kapacitása**: $c(X) = \sum\{c(uv) : u \in X, v \notin X\}$.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)





Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

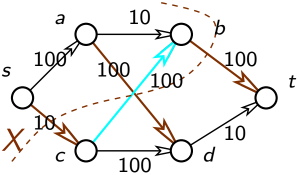
indukált *st*-vágás: $s \in X \subseteq V - t$ esetén az X és $V - X$ között futó élek halmaza.

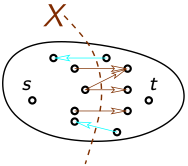
A fenti ***st*-vágás kapacitása**: $c(X) = \sum\{c(uv) : u \in X, v \notin X\}$.

Lemma: Ha z st-folyam és $s \in X \not\ni t$, akkor
$m_z = \sum\{z(uv) : u \in X,\ v \notin X\} - \sum\{z(vu) : u \in X,\ v \notin X\} \leq \sum\{c(uv) : u \in X,\ v \notin X\} = c(X)$. $\square$

Megj: A Lemma azt mondja ki, hogy egyetlen st-folyam nagysága sem haladhatja meg egyetlen st-vágás kapacitását sem.

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)





Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

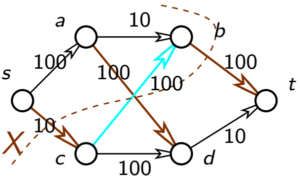
indukált *st*-vágás: $s \in X \subseteq V - t$ esetén az X és $V - X$ között futó élek halmaza.

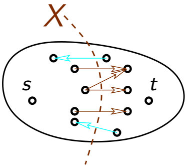
A fenti ***st*-vágás kapacitása**: $c(X) = \sum\{c(uv) : u \in X, v \notin X\}$.

Lemma: Ha z st-folyam és $s \in X \not\ni t$, akkor

$m_z = \sum\{z(uv) : u \in X,\ v \notin X\} - \sum\{z(vu) : u \in X,\ v \notin X\} \leq \sum\{c(uv) : u \in X,\ v \notin X\} = c(X)$. $\square$

Maximális nagyságú folyamok (ismétlés)





Def: **Hálózat**: (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ **terminálok** (termelő, fogyasztó), $c : E \to \mathbb{R}_+$ pedig a **kapacitásfüggvény**.

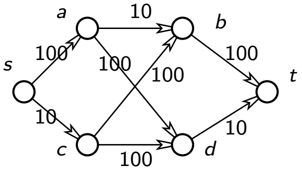
indukált *st*-vágás: $s \in X \subseteq V - t$ esetén az X és $V - X$ között futó élek halmaza.

A fenti ***st*-vágás kapacitása**: $c(X) = \sum\{c(uv) : u \in X, v \notin X\}$.

Lemma: Ha z st-folyam és $s \in X \not\ni t$, akkor $m_z = \sum\{z(uv) : u \in X,\ v \notin X\} - \sum\{z(vu) : u \in X,\ v \notin X\} \leq \sum\{c(uv) : u \in X,\ v \notin X\} = c(X)$. $\square$

Köv: Ha z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$ esetén $m_z = c(X)$, akkor
(1) z maximális nagyságú st-folyam, és
(2) X minimális kapacitású st-vágást indukál. $\square$

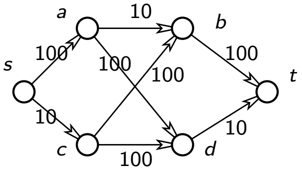
A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

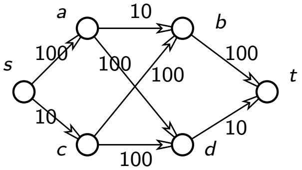
Megj: Azaz az st-folyamok maximális nagysága megegyezik az st-vágások minimális kapacitásával.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



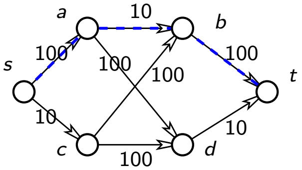
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



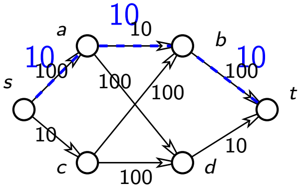
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

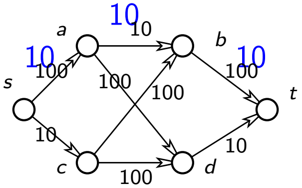
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



$sabt$: 10

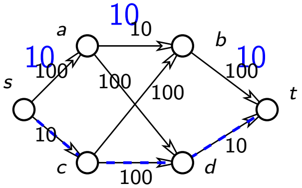
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

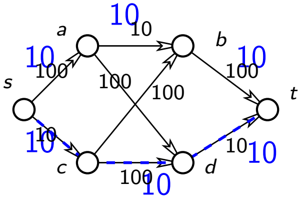
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

scdt : 10

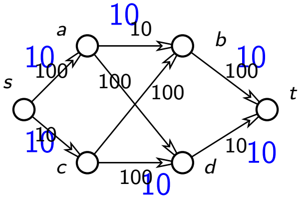
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

scdt : 10

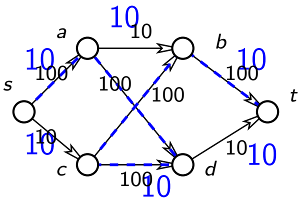
Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

scdt : 10

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

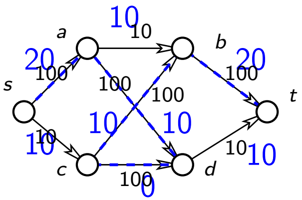
A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot.

Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



$sabt$: 10
$scdt$: 10
$sadcbt$: 10

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

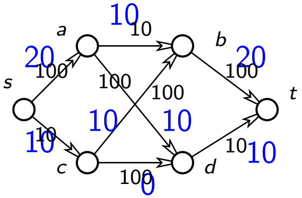
A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot.

Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10
scdt : 10
sadcbt : 10
$m_z = 30$

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

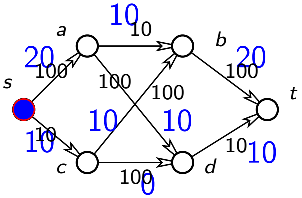
Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot. Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10
scdt : 10
sadcbt : 10
$m_z = 30$

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

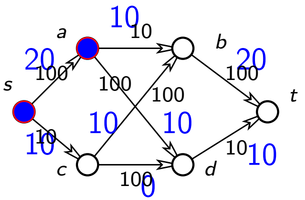
Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot. Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

scdt : 10

sadcbt : 10

$m_z = 30$

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

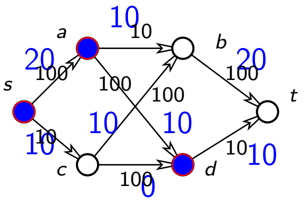
A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot.

Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



$sabt$: 10
$scdt$: 10
$sadcbt$: 10
$m_z = 30$
$X = \{s, a, d\}$

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

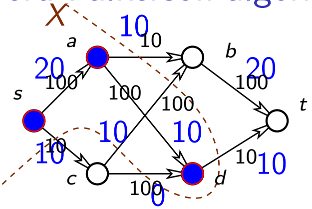
Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.

Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.

Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot. Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ismétlés)



sabt : 10

scdt : 10

sadcbt : 10

$m_z = 30$

$X = \{s, a, d\}$

$c(X) = 30$

Ford-Fulkerson (MFMC) tétel: Tetsz. (G, s, t, c) hálózatban található olyan z st-folyam és $s \in X \subseteq V - t$, amire $m_z = c(X)$.

Biz: Javító utas algoritmus

A $z \equiv 0$ folyamból kiindulva mindig javító utak mentén küldünk folyamot s-ből t-be, amíg csak tudunk.
Telítetlen élekből álló st-úton mindig tudunk folyamot növelni.
Titkos fegyver: ha nincs ilyen út, akkor (a telítetlen éleken történő folyamnövelés mellett) a pozitív élen csökkenthetjük a folyamot.
Ezáltal visszafelé küldünk virtuális folyamot egy él mentén. Ha így találunk st-utat, akkor annak a mentén is tudunk folyamot növelni.
Ha nincs javító út, akkor a telítetlen ill. megfordított pozitív éleken s-ből elérhető csúcsok X halmazára $m_z = c(X)$ teljesül. $\square$

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

Biz: A javító utas algoritmus során mindvégig igaz marad, hogy $z(e)$ egész szám a hálózat minden e élére. Így ez a tulajdonság az algoritmussal kapott maximális nagyságú folyamra is teljesül. $\square$

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

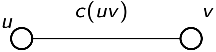
A folyamprobléma általánosításai

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

A folyamprobléma általánosításai

Irányítatlan élek kezelése:

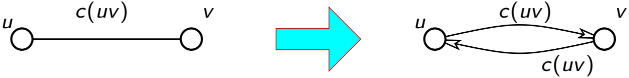


Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

A folyamprobléma általánosításai

Irányítatlan élek kezelése:

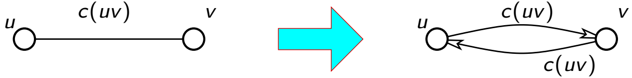


Egész kapacitások, általánosított hálózatok

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

A folyamprobléma általánosításai

Irányítatlan élek kezelése:



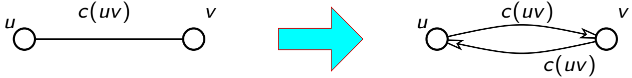
Több termelő, több fogyasztó, egyféle termék:

Egész kapacitások, általánosított hálózatok

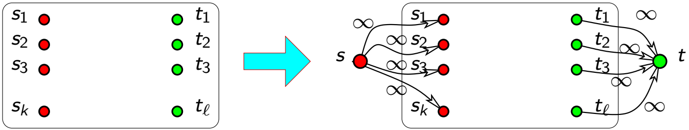
Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. □

A folyamprobléma általánosításai

Irányítatlan élek kezelése:



Több termelő, több fogyasztó, egyféle termék:

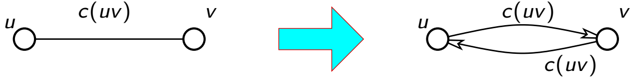


Egész kapacitások, általánosított hálózatok

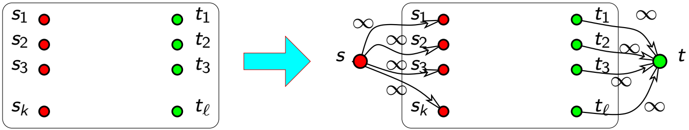
Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. □

A folyamprobléma általánosításai

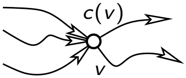
Irányítatlan élek kezelése:



Több termelő, több fogyasztó, egyféle termék:



Csúcskapacitások bevezetése akkor indokolt, ha a hálózat egyes csúcsainak korlátozott az átbocsátóképessége.

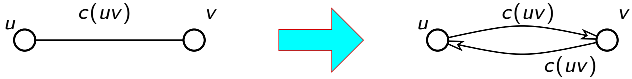


Egész kapacitások, általánosított hálózatok

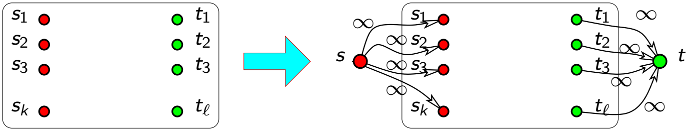
Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden $c(e)$ élkapacitás egész szám, akkor van olyan maximális nagyságú z folyam, amire $z(e)$ is egész szám minden e élre. $\square$

A folyamprobléma általánosításai

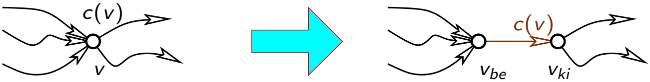
Irányítatlan élek kezelése:



Több termelő, több fogyasztó, egyféle termék:

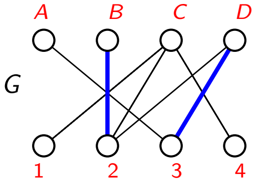


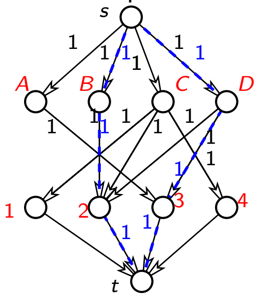
Csúcskapacitások bevezetése akkor indokolt, ha a hálózat egyes csúcsainak korlátozott az átbocsátóképessége.



Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

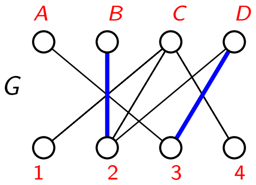
Páros gráf maximális párosítása megfogalmazható maximális folyam feladatként. Irányítsunk minden élt A-ból B-be, vegyünk fel s, t terminálokat, minden sa és minden bt élt, és legyen minden él kapacitása 1. Ha van k ftn él G-ben, akkor a kapott hálózatban van k nagyságú st-folyam. Ha van k nagyságú (egész) st-folyam a hálózatban, akkor G-ben van k méretű párosítás.

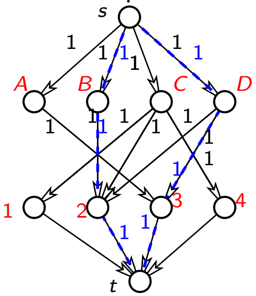




Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

Páros gráf maximális párosítása megfogalmazható maximális folyam feladatként. Irányítsunk minden élt A-ból B-be, vegyünk fel s, t terminálokat, minden sa és minden bt élt, és legyen minden él kapacitása 1. Ha van k ftn él G-ben, akkor a kapott hálózatban van k nagyságú st-folyam. Ha van k nagyságú (egész) st-folyam a hálózatban, akkor G-ben van k méretű párosítás.





A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?

Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?

Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban? Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.

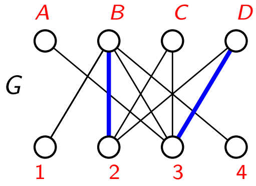
Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
I. Ha van ilyen út, akkor ezen út mentén cserélünk: az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket bevesszük M-be. (Tkp az út élei megfordítjuk.) Az így kapott párosítás 2-vel több csúcsot fed, tehát 1-gyel több élből áll, mint a korábbi.

Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

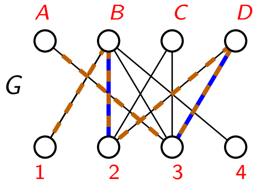
A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban? Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.

I. Ha van ilyen út, akkor ezen út mentén cserélünk: az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket bevesszük M-be. (Tkp az út élei megfordítjuk.) Az így kapott párosítás 2-vel több csúcsot fed, tehát 1-gyel több élből áll, mint a korábbi.



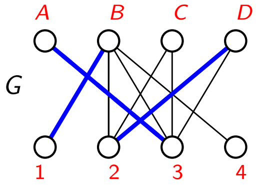
Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
I. Ha van ilyen út, akkor ezen út mentén cserélünk: az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket bevesszük M-be. (Tkp az út élei megfordítjuk.) Az így kapott párosítás 2-vel több csúcsot fed, tehát 1-gyel több élből áll, mint a korábbi.



Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
I. Ha van ilyen út, akkor ezen út mentén cserélünk: az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket bevesszük M-be. (Tkp az út élei megfordítjuk.) Az így kapott párosítás 2-vel több csúcsot fed, tehát 1-gyel több élből áll, mint a korábbi.

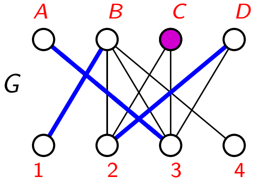


Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban? Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.

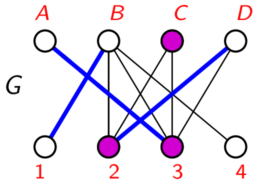
Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
II. Ha nincs ilyen út, akkor legyen Z az M által fedetlen A-beli csúcsokból irányított úton elérhető csúcsok halmaza és $X = A \cap Z$. Így $N(X) = B \cap Z$, ezért $Y = (A \setminus X) \cup N(X)$ a G egy $|M|$ méretű lefogó ponthalmaza. $\tau(G) \leq |Y| = |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G)$ miatt M maximális független élhalmaz, Y pedig minimális méretű lefogó ponthalmaz.



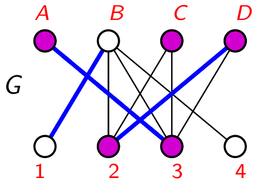
Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
II. Ha nincs ilyen út, akkor legyen Z az M által fedetlen A-beli csúcsokból irányított úton elérhető csúcsok halmaza és $X = A \cap Z$. Így $N(X) = B \cap Z$, ezért $Y = (A \setminus X) \cup N(X)$ a G egy $|M|$ méretű lefogó ponthalmaza. $\tau(G) \leq |Y| = |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G)$ miatt M maximális független élhalmaz, Y pedig minimális méretű lefogó ponthalmaz.



Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

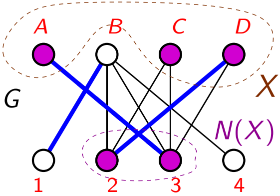
A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban?
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.
II. Ha nincs ilyen út, akkor legyen Z az M által fedetlen A-beli csúcsokból irányított úton elérhető csúcsok halmaza és $X = A \cap Z$. Így $N(X) = B \cap Z$, ezért $Y = (A \setminus X) \cup N(X)$ a G egy $|M|$ méretű lefogó ponthalmaza. $\tau(G) \leq |Y| = |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G)$ miatt M maximális független élhalmaz, Y pedig minimális méretű lefogó ponthalmaz.



Páros gráfok maximális párosításai (ismétlés)

A fenti hálózaton a javító utas algoritmus az EgÉr lemma miatt maximális nagyságú egészfolyamot szolgáltat, így megkapjuk G egy maximális párosítását. Hogy néz ki ez a gyakorlatban? Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és ezt növeljük minden lépésben. Így néz ki egy lépés: M éleit B-ből A-ba, G többi élét A-ból B-be irányítjuk, majd A-beli, M által fedetlen csúcsból B-beli, M által fedetlen csúcsba keresünk irányított utat.

II. Ha nincs ilyen út, akkor legyen Z az M által fedetlen A-beli csúcsokból irányított úton elérhető csúcsok halmaza és $X = A \cap Z$. Így $N(X) = B \cap Z$, ezért $Y = (A \setminus X) \cup N(X)$ a G egy $|M|$ méretű lefogó ponthalmaza. $\tau(G) \leq |Y| = |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G)$ miatt M maximális független élhalmaz, Y pedig minimális méretű lefogó ponthalmaz.



Az EgÉr lemma egy rokona

Kerekítési lemma folyamokra: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g(e)$ élkapacitások egészek és z megengedett folyam. Ekkor van olyan z^* megengedett folyam is, amelyre $z^*(e) \in \mathbb{Z}_+$ és $\lfloor z(e) \rfloor \leq z^*(e) \leq \lceil z(e) \rceil$ teljesül D minden e élére.

Az EgÉr lemma egy rokona

Kerekítési lemma folyamokra: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g(e)$ élkapacitások egészek és z megengedett folyam. Ekkor van olyan z^* megengedett folyam is, amelyre $z^*(e) \in \mathbb{Z}_+$ és $\lfloor z(e) \rfloor \leq z^*(e) \leq \lceil z(e) \rceil$ teljesül D minden e élére.

Biz: Az alábbi kerekítési lépéseket végezzük. Egy e él **törtél**, ha $z(e) \notin \mathbb{Z}$, különben e **egész él**. Minden lépés során legalább egy törtél egész éllé válik, egész élből pedig sosem lesz törtél.
A folyammegmaradás miatt nemterminálisra nem illeszkedhet pontosan egy törtél. Ezért amíg van törtél, addig van törtélekből álló st-út vagy kör. Egy ilyen út/kör mentén lehet úgy változtatni a z folyamot, hogy $z(e)$ egyetlen e élen se ugorjon át egész számot, de legalább egy törtél eltűnjön. Véges sok ilyen lépés után minden él egésszé válik, és győztünk. $\square$

Az EgÉr lemma egy rokona

Kerekítési lemma folyamokra: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g(e)$ élkapacitások egészek és z megengedett folyam. Ekkor van olyan z^* megengedett folyam is, amelyre $z^*(e) \in \mathbb{Z}_+$ és $\lfloor z(e) \rfloor \leq z^*(e) \leq \lceil z(e) \rceil$ teljesül D minden e élére.

Biz: Az alábbi kerekítési lépéseket végezzük. Egy e él **törtél**, ha $z(e) \notin \mathbb{Z}$, különben e **egész él**. Minden lépés során legalább egy törtél egész éllé válik, egész élből pedig sosem lesz törtél.
A folyammegmaradás miatt nemterminálisra nem illeszkedhet pontosan egy törtél. Ezért amíg van törtél, addig van törtélekből álló st-út vagy kör. Egy ilyen út/kör mentén lehet úgy változtatni a z folyamot, hogy $z(e)$ egyetlen e élen se ugorjon át egész számot, de legalább egy törtél eltűnjön. Véges sok ilyen lépés után minden él egésszé válik, és győztünk. $\square$

Megj: A fenti lemmában z úgy is kerekíthető, hogy az m_z folyamnagyság is kerekedjék.

Az EgÉr lemma egy rokona

Kerekítési lemma folyamokra: Tfh a (D, s, t, g) hálózatban a $g(e)$ élkapacitások egészek és z megengedett folyam. Ekkor van olyan z^* megengedett folyam is, amelyre $z^*(e) \in \mathbb{Z}_+$ és $\lfloor z(e) \rfloor \leq z^*(e) \leq \lceil z(e) \rceil$ teljesül D minden e élére.

Biz: Az alábbi kerekítési lépéseket végezzük. Egy e él **törtél**, ha $z(e) \notin \mathbb{Z}$, különben e **egész él**. Minden lépés során legalább egy törtél egész éllé válik, egész élből pedig sosem lesz törtél.
A folyammegmaradás miatt nemterminálisra nem illeszkedhet pontosan egy törtél. Ezért amíg van törtél, addig van törtélekből álló st-út vagy kör. Egy ilyen út/kör mentén lehet úgy változtatni a z folyamot, hogy $z(e)$ egyetlen e élen se ugorjon át egész számot, de legalább egy törtél eltűnjön. Véges sok ilyen lépés után minden él egésszé válik, és győztünk. □

Megj: A fenti lemmában z úgy is kerekíthető, hogy az m_z folyamnagyság is kerekedjék. Ehhez mindössze egy új s^* csúcsot és egy kellően nagy kapacitású s^*s élt kell bevezetni valamint ezen élhez m_z nagyságú folyamértéket rendelni.

A kerekítési lemma alkalmazása

Kőnig élszínezési tétele: Tetszőleges G páros gráf élkromatikus számára $\chi(G) = \Delta(G)$ teljesül.

A kerekítési lemma alkalmazása

Kőnig élszínezési tétele: Tetszőleges G páros gráf élkromatikus számára $\chi(G) = \Delta(G)$ teljesül.

Biz: Legyenek G színosztályai A és B és definiáljuk a (D, s, t, g) hálózatot az alábbiak szerint. Irányítsunk minden élt A-ból B-be, vezessük be az s, t új csúcsokat, húzzunk be egy-egy irányított élt s-ből minden A-belibe és minden B-beliből t-be, és adjunk minden élnek $g \equiv 1$ kapacitást. Legyen $z(e) = 1/\Delta(G)$ a G minden e élére. Ez egyértelműen kiterjeszthető a hálózat egy z folyamává. Ekkor $z(sa) = 1$ ill. $z(bt) = 1$ minden $\Delta(G)$-fokú a ill. b csúcsra. Legyen z^* a z-nek a kerekítési lemma szerinti kerekítettje. Mivel $g \equiv 1$, ezért z^* belsőleg pontdiszjunkt st-utak karakterisztikus vektora, ami minden maxfokszámú csúcsot lefed. Az utak középső élei ezért alkalmasak egy színosztálynak, hiszen egyrészt párosítást alkotnak, másrészt pedig Δ csökken, ha ezeket G-ből töröljük.

A kerekítési lemma alkalmazása

Kőnig élszínezési tétele: Tetszőleges G páros gráf élkromatikus számára $\chi(G) = \Delta(G)$ teljesül.

Biz: Legyenek G színosztályai A és B és definiáljuk a (D, s, t, g) hálózatot az alábbiak szerint. Irányítsunk minden élt A-ból B-be, vezessük be az s, t új csúcsokat, húzzunk be egy-egy irányított élt s-ből minden A-belibe és minden B-beliből t-be, és adjunk minden élnek $g \equiv 1$ kapacitást. Legyen $z(e) = 1/\Delta(G)$ a G minden e élére. Ez egyértelműen kiterjeszthető a hálózat egy z folyamává. Ekkor $z(sa) = 1$ ill. $z(bt) = 1$ minden $\Delta(G)$-fokú a ill. b csúcsra. Legyen z^* a z-nek a kerekítési lemma szerinti kerekítettje. Mivel $g \equiv 1$, ezért z^* belsőleg pontdiszjunkt st-utak karakterisztikus vektora, ami minden maxfokszámú csúcsot lefed. Az utak középső élei ezért alkalmasak egy színosztálynak, hiszen egyrészt párosítást alkotnak, másrészt pedig Δ csökken, ha ezeket G-ből töröljük. A kapott párosítás kiszínezése után megmaradó gráfon ugyanezt $\Delta(G)$-szer ismételve megkapjuk G egy $\Delta(G)$-élszínezését. $\square$

A kerekítési lemma alkalmazása II.

Páros gráfok egyenletes élszínezési tétele: Legyen G páros gráf és k pozitív egész. Ekkor G élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a színezés minden csillagon a lehető legegyenletesebb legyen, azaz tetszőleges v csúcsra és i színre a v-re illeszkedő i színű élek száma $l(v) := \lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $u(v) := \lceil d(v)/k \rceil$ legyen.

Megj: A fenti színezést **egyenletes színezés**nek hívjuk.

A kerekítési lemma alkalmazása II.

Páros gráfok egyenletes élszínezési tétele: Legyen G páros gráf és k pozitív egész. Ekkor G élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a színezés minden csillagon a lehető legegyenletesebb legyen, azaz tetszőleges v csúcsra és i színre a v-re illeszkedő i színű élek száma $l(v) := \lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $u(v) := \lceil d(v)/k \rceil$ legyen.

Megj: A fenti színezést **egyenletes színezés**nek hívjuk.

Biz: Az előző bizonyításban szereplő konstrukciót úgy módosítjuk, hogy $z(e)$-t $1/k$-nak választjuk G minden élén. A kerekítés után tetsz. v csúcsból $l(v)$ vagy $u(v)$ élt fogunk kiválasztani, továbbá az ezen élek elhagyásával kapott gráfban $d'(v)/(k-1)$ továbbra is $l(v)$ és $u(v)$ közé esik. A maradék gráfra ugyanezt az eljárást $k-1$-re elvégezve folytatjuk az élek színezését, míg végül egy egyenletes élszínezést kapunk. $\square$

A kerekítési lemma alkalmazása II.

Páros gráfok egyenletes élszínezési tétele: Legyen G páros gráf és k pozitív egész. Ekkor G élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a színezés minden csillagon a lehető legegyenletesebb legyen, azaz tetszőleges v csúcsra és i színre a v-re illeszkedő i színű élek száma $l(v) := \lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $u(v) := \lceil d(v)/k \rceil$ legyen.

Megj: A fenti színezést **egyenletes színezés**nek hívjuk.

Biz: Az előző bizonyításban szereplő konstrukciót úgy módosítjuk, hogy $z(e)$-t $1/k$-nak választjuk G minden élén. A kerekítés után tetsz. v csúcsból $l(v)$ vagy $u(v)$ élt fogunk kiválasztani, továbbá az ezen élek elhagyásával kapott gráfban $d'(v)/(k-1)$ továbbra is $l(v)$ és $u(v)$ közé esik. A maradék gráfra ugyanezt az eljárást $k-1$-re elvégezve folytatjuk az élek színezését, míg végül egy egyenletes élszínezést kapunk. $\square$

Megj:

Kőnig élszínezési tétele a fenti tétel speciális esete $k = \Delta(G)$-re.

Mátrixok kerekítése

Táblázat-kerekítési lemma: Ha egy A mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Mátrixok kerekítése

Táblázat-kerekítési lemma: Ha egy A mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Biz: Egyetlen sorban vagy oszlopban sem lehet pontosan egy tört szám. Ezért amíg van tört a mátrixban, található a törtelemeken vízszintes és függőleges lépésekből álló zárt út. Ennek a mentén minden „első” elemet ε-nal növelve, minden másodikat ε-nal csökkentve egyetlen sor- vagy oszlopösszeg sem változik. Az ε alkalmas választásával elérhető, hogy legalább egy tört eltűnjön, miközben egyetlen mátrixelem sem ugrik át egész számot. Ilyen változtatásokkal előbb-utóbb minden tört eltűnik A'-ből. $\square$

Mátrixok kerekítése

Táblázat-kerekítési lemma: Ha egy A mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Biz: Egyetlen sorban vagy oszlopban sem lehet pontosan egy tört szám. Ezért amíg van tört a mátrixban, található a törtelemeken vízszintes és függőleges lépésekből álló zárt út. Ennek a mentén minden „első" elemet ε-nal növelve, minden másodikat ε-nal csökkentve egyetlen sor- vagy oszlopösszeg sem változik. Az ε alkalmas választásával elérhető, hogy legalább egy tört eltűnjön, miközben egyetlen mátrixelem sem ugrik át egész számot. Ilyen változtatásokkal előbb-utóbb minden tört eltűnik A'-ből. □

Kínzó kérdések:

1. Van-e bármi köze egymáshoz a folyamokra ill. a táblázatokra vonatkozó kerekítési lemmáknak?

Mátrixok kerekítése

Táblázat-kerekítési lemma: Ha egy A mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Biz: Egyetlen sorban vagy oszlopban sem lehet pontosan egy tört szám. Ezért amíg van tört a mátrixban, található a törtelemeken vízszintes és függőleges lépésekből álló zárt út. Ennek a mentén minden „első" elemet ε-nal növelve, minden másodikat ε-nal csökkentve egyetlen sor- vagy oszlopösszeg sem változik. Az ε alkalmas választásával elérhető, hogy legalább egy tört eltűnjön, miközben egyetlen mátrixelem sem ugrik át egész számot. Ilyen változtatásokkal előbb-utóbb minden tört eltűnik A'-ből. $\square$

Kínzó kérdések:

1. Van-e bármi köze egymáshoz a folyamokra ill. a táblázatokra vonatkozó kerekítési lemmáknak?
2. Mit mondhatunk akkor, ha a kerekítendő táblázatban nem feltétlenül egészek a sor- és oszlopösszegek?

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma
- Páros gráf párosítása egészfolyamként is felfogható

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma
- Páros gráf párosítása egészfolyamként is felfogható
- Kerekítési lemma folyamokra

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma
- Páros gráf párosítása egészfolyamként is felfogható
- Kerekítési lemma folyamokra
- Kőnig élszínezési tétele és annak általánosítása egyenletes színezésre

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma
- Páros gráf párosítása egészfolyamként is felfogható
- Kerekítési lemma folyamokra
- Kőnig élszínezési tétele és annak általánosítása egyenletes színezésre
- Táblázatkerekítési lemma

Mit tanultunk ma?

- Hálózati folyamok, *st*-vágások, maximális folyamkeresés
- EgÉr lemma
- Páros gráf párosítása egészfolyamként is felfogható
- Kerekítési lemma folyamokra
- Kőnig élszínezési tétele és annak általánosítása egyenletes színezésre
- Táblázatkerekítési lemma

Szorgos népünk győzni fog!