Gráfok és algoritmusok

Gráfok maximális párosításai

2024. április 18.

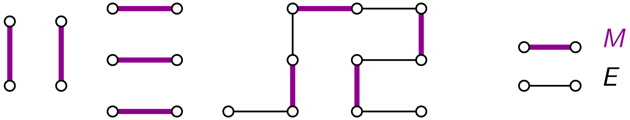
Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Biz: Tfh M maximális párosítás és P egy M-alternáló javító út élhalmaza. Ekkor az $M \triangle P$ szimmetrikus különbség egy M-nél több élt tartalmazó párosítás, ami ellentmondás. Tehát maximális párosításhoz nincs javító út.



Gráfok maximális párosításainak jellemzése

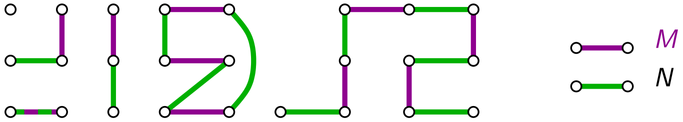
Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Biz:

Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Biz: Ha M nem maximális párosítás, akkor van nála több élt tartalmazó $N \subseteq E$ párosítás. Az $M \cup N$ élhalmaz olyan gráfot alkot, amiben minden pont fokszáma legfeljebb 2. Az ilyen gráfok minden komponense út vagy kör, jelen esetben MN-alternáló út vagy kör. Mivel $|N| > |M|$, ezért van olyan komponens, ami több N-beli élt tartalmaz, mint M-belit, ez pedig csakis egy M-alternáló javító út lehet. $\square$



Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

Megj: Tetsz. G gráfban kereshetünk úgy maximális párosítást, hogy az üres párosításból kiindulva javító utak mentén javítunk. Ha már nincs javító út, akkor a kapott párosítás maximális. „Csupán" azt szubrutint kell megalkotnunk, ami egy adott gráf és párosítása esetén hatékonyan talál javító utat, ha van.

Gráfok maximális párosításainak jellemzése

Berge tétele: A $G = (V, E)$ gráf egy $M \subset E$ párosítása pontosan akkor maximális G-ben, ha nem létezik M-alternáló **javító út**, azaz G-nek egy olyan, M által fedetlen csúcsai között vezető útja, amelyben minden második él M-beli.

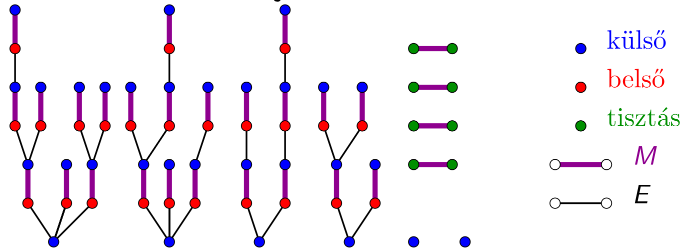
Megj: Tetsz. G gráfban kereshetünk úgy maximális párosítást, hogy az üres párosításból kiindulva javító utak mentén javítunk. Ha már nincs javító út, akkor a kapott párosítás maximális. ,,Csupán" azt szubrutint kell megalkotnunk, ami egy adott gráf és párosítása esetén hatékonyan talál javító utat, ha van. Páros gráfok esetén ez egyszerű volt, mert könnyen lehetett az éleket úgy irányítani, hogy a javító út létezésének kérdése fedetlen csúcsok közötti irányítatlan elérhetőségi problémává egyszerűsödött. Nem feltétlenül páros gráfok esetében ez a probléma nehezebb, de kezelhető. Edmonds most ismertetendő algoritmusának éppen ez a kulcslépése.

M-alternáló erdő

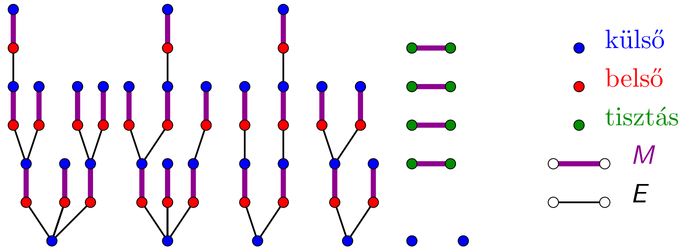
Def: A G gráf F részgráfja **M-alternáló erdő**, ha M párosítás,

- F erdő és minden komponense pontosan egy M-fedetlen csúcsot tartalmaz (ami az adott komponens **gyökere**),
- G minden M-fedetlen csúcsa F-beli (tehát F komponenseinek száma megegyezik az M által fedetlen csúcsok számával), és
- F minden gyökérből induló útja M-alternáló út.
- F minden levele páros távolságra van a gyökértől.

Egy M-alternáló F erdő esetén F **külső** ill. **belső csúcsa** az F-nek a gyökértől páros ill. páratlan távolságra lévő csúcsa. A G gráfnak az F-en kívüli csúcsai alkotják a **tisztást**.

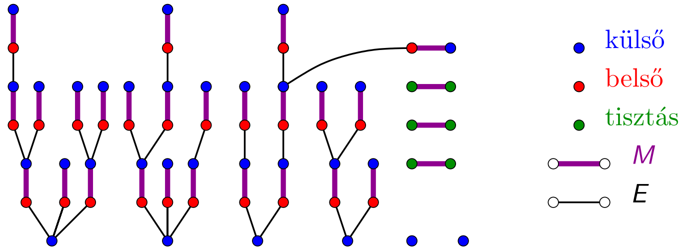


M-alternáló javító út keresése



Az M-fedetlen csúcsok alkotta üres M-alternáló erdővel kezdünk.
Az M-alternáló erdőt külső csúcsból induló éllel építjük tovább.

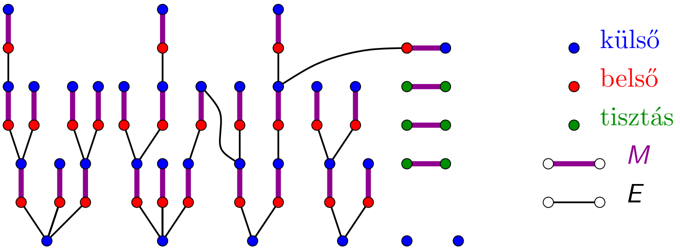
M-alternáló javító út keresése



Az M-fedetlen csúcsok alkotta üres M-alternáló erdővel kezdünk.
Az M-alternáló erdőt külső csúcsból induló éllel építjük tovább.

- Ha külső csúcsból fut él a tisztásra, akkor az erdőt növeljük.

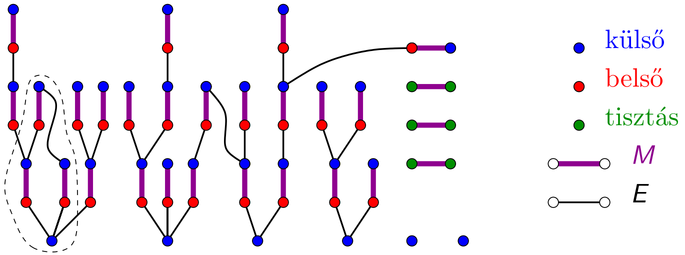
M-alternáló javító út keresése



Az M-fedetlen csúcsok alkotta üres M-alternáló erdővel kezdünk.
Az M-alternáló erdőt külső csúcsból induló éllel építjük tovább.

- Ha külső csúcsból fut él a tisztásra, akkor az erdőt növeljük.
- Ha két különböző komponens külső csúcsa között fut G-nek éle, akkor a két gyökér között van M-alternáló javító út.

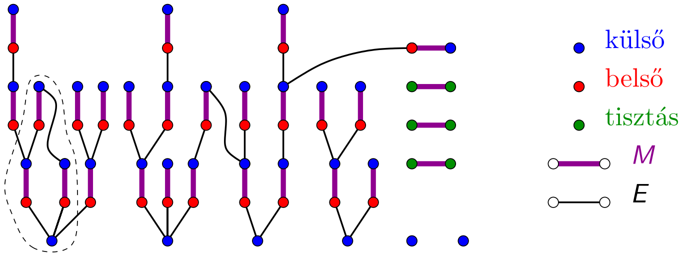
M-alternáló javító út keresése



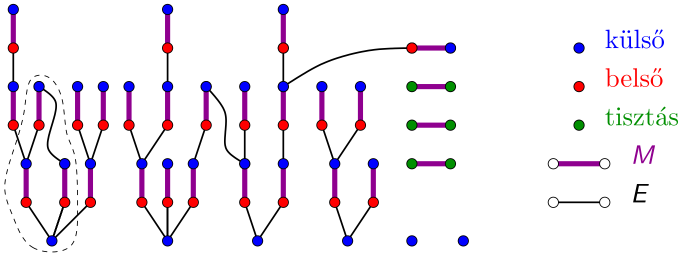
Az M-fedetlen csúcsok alkotta üres M-alternáló erdővel kezdünk.
Az M-alternáló erdőt külső csúcsból induló éllel építjük tovább.

- Ha külső csúcsból fut él a tisztásra, akkor az erdőt növeljük.
- Ha két különböző komponens külső csúcsa között fut G-nek éle, akkor a két gyökér között van M-alternáló javító út.
- Ha egy komponens két külső csúcsa között fut G-nek éle, akkor a komponensen belül találunk egy páratlan kört („blossom"-ot), amit összeolvasztunk. Így az összeolvasztás során keletkező gráf egy M' párosítását és egy M'-alternáló erdőt kapunk, aminek az összeolvasztott blossom külső csúcsa.

M-alternáló javító út keresése

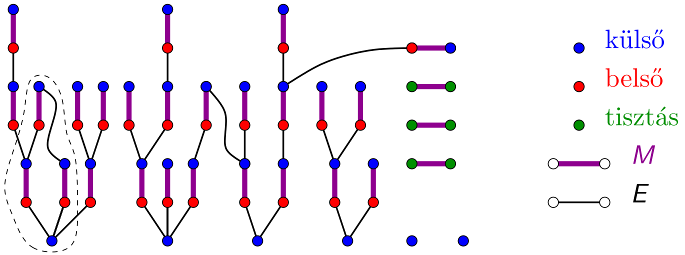


M-alternáló javító út keresése



Az így kapott M-alternáló erdő tulajdonságai:

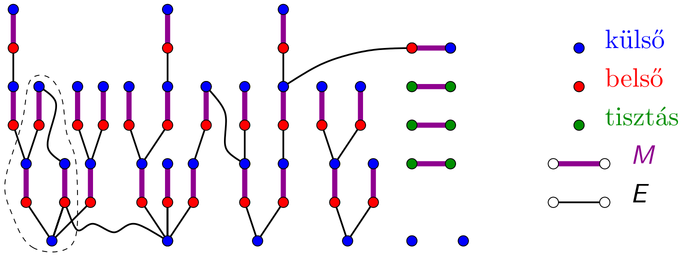
M-alternáló javító út keresése



Az így kapott M-alternáló erdő tulajdonságai:

- Minden belső csúcs az eredeti G-nek is csúcsa, és minden külső csúcs a G páratlan sok csúcsának összeolvasztása.

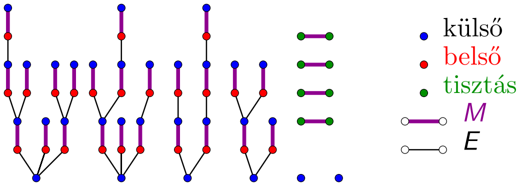
M-alternáló javító út keresése



Az így kapott M-alternáló erdő tulajdonságai:

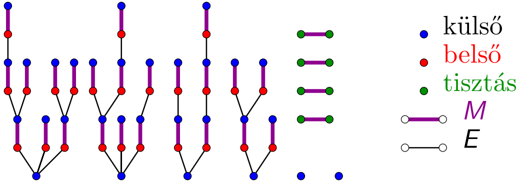
- Minden belső csúcs az eredeti G-nek is csúcsa, és minden külső csúcs a G páratlan sok csúcsának összeolvasztása.
- Ha két komponens külső csúcsa között fut él, akkor a gyökerek között futó javító út segítségével az eredeti G-ben is találunk M-alternáló javító utat. Ha a javító úton van összeolvasztott csúcs, akkor az utolsó összeolvasztás előtt is volt javító út.

Edmonds algoritmusa



Az $M = \emptyset$ párosításból indulunk. M-alternáló erdőt építünk, a kapott M-altertnáló javító utak mentén javítunk. Ha ezzel elakadunk, akkor a kapott M az Edmonds-algoritmus outputja. Ekkor külső csúcsból se külső csúcsba, se tisztásra nem fut él.

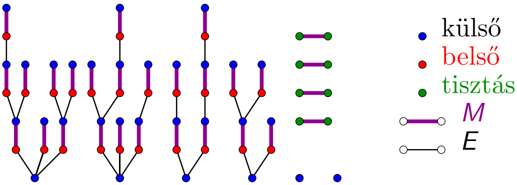
Edmonds algoritmusa



Az $M = \emptyset$ párosításból indulunk. M-alternáló erdőt építünk, a kapott M-altertnáló javító utak mentén javítunk. Ha ezzel elakadunk, akkor a kapott M az Edmonds-algoritmus outputja. Ekkor külső csúcsból se külső csúcsba, se tisztásra nem fut él. Ezért ha G-ből elhagyjuk a belső csúcsokat, akkor G szétesik: a külső csúcsok egy-egy páratlan komponensnek, a tisztás csúcsai pedig páros komponenseknek fognak megfelelni.

(Egy komponens paritása a csúcsai számának paritását jelenti.)

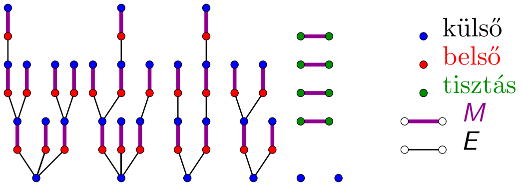
Edmonds algoritmusa



Az $M = \emptyset$ párosításból indulunk. M-alternáló erdőt építünk, a kapott M-altertnáló javító utak mentén javítunk. Ha ezzel elakadunk, akkor a kapott M az Edmonds-algoritmus outputja. Ekkor külső csúcsból se külső csúcsba, se tisztásra nem fut él. Ezért ha G-ből elhagyjuk a belső csúcsokat, akkor G szétesik: a külső csúcsok egy-egy páratlan komponensnek, a tisztás csúcsai pedig páros komponenseknek fognak megfelelni.

(Egy komponens paritása a csúcsai számának paritását jelenti.) Az M output G annyi csúcsát hagyja fedetlenül, amennyivel a külső csúcsok száma több a belsőkénél. Szám szerint $o(G - Z) - |Z|$ csúcsot, ahol Z a belső pontok halmazát, $o(G - Z)$ pedig $G - Z$ páratlan komponenseinek számát jelöli.

Edmonds algoritmusa



Az $M = \emptyset$ párosításból indulunk. M-alternáló erdőt építünk, a kapott M-altertnáló javító utak mentén javítunk. Ha ezzel elakadunk, akkor a kapott M az Edmonds-algoritmus outputja. Ekkor külső csúcsból se külső csúcsba, se tisztásra nem fut él. Ezért ha G-ből elhagyjuk a belső csúcsokat, akkor G szétesik: a külső csúcsok egy-egy páratlan komponensnek, a tisztás csúcsai pedig páros komponenseknek fognak megfelelni.

(Egy komponens paritása a csúcsai számának paritását jelenti.) Az M output G annyi csúcsát hagyja fedetlenül, amennyivel a külső csúcsok száma több a belsőkénél. Szám szerint $o(G - Z) - |Z|$ csúcsot, ahol Z a belső pontok halmazát, $o(G - Z)$ pedig $G - Z$ páratlan komponenseinek számát jelöli. Ezért az M output mérete

$$|M| = \frac{1}{2}\left(|V| + |Z| - o(G - Z)\right) .$$

A maximális párosítás mérete

Berge-Tutte-formula: Tetszőleges G véges gráfra
$\nu(G) = \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

A maximális párosítás mérete

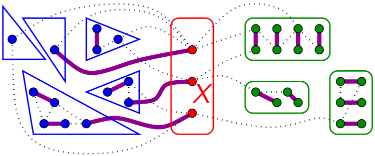
Berge-Tutte-formula: Tetszőleges G véges gráfra $\nu(G) = \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G-X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Biz: Ha M az Edmonds-alg outputja és Z a belső csúcsok halmaza, akkor $\nu(G) \geq |M| = \frac{1}{2}(|V| + |Z| - o(G-Z)) \geq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G-X)) : X \subseteq V(G)\}$.

A maximális párosítás mérete

Berge-Tutte-formula: Tetszőleges G véges gráfra $\nu(G) = \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Biz: Ha M az Edmonds-alg outputja és Z a belső csúcsok halmaza, akkor $\nu(G) \geq |M| = \frac{1}{2}(|V| + |Z| - o(G - Z)) \geq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.



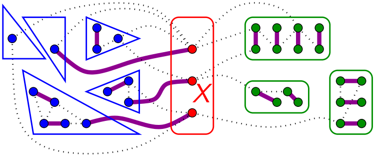
Legyen M egy $\nu(G)$ méretű párosítás G-ben. Tetsz. $X \subseteq V(G)$ esetén $G - X$ minden páratlan komponensének van legalább egy olyan csúcsa, amiből nem fut M- beli él a komponensen belül. Ezen legalább $o(G - X)$ csúcs közül legfeljebb $|X|$ csúcsnak lehet M-beli párja, ezért M biztosan fedetlenül hagy $o(G - X) - |X|$ db csúcsot. Tehát $\nu(G) = |M| \leq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$. $\square$

A maximális párosítás mérete

Berge-Tutte-formula: Tetszőleges G véges gráfra
$\nu(G) = \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Biz: Ha M az Edmonds-alg outputja és Z a belső csúcsok halmaza, akkor $\nu(G) \geq |M| = \frac{1}{2}(|V| + |Z| - o(G - Z)) \geq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Legyen M egy $\nu(G)$ méretű párosítás G-ben. Tetsz. $X \subseteq V(G)$ esetén $G - X$ minden páratlan komponensének van legalább egy olyan csúcsa,



amiből nem fut M- beli él a komponensen belül. Ezen legalább $o(G - X)$ csúcs közül legfeljebb $|X|$ csúcsnak lehet M-beli párja, ezért M biztosan fedetlenül hagy $o(G - X) - |X|$ db csúcsot. Tehát $\nu(G) = |M| \leq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$. □

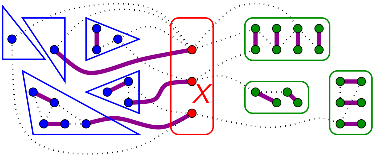
Köv: (1) Az Edmonds-algoritmus outputja max párosítás.

A maximális párosítás mérete

Berge-Tutte-formula: Tetszőleges G véges gráfra $\nu(G) = \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Biz: Ha M az Edmonds-alg outputja és Z a belső csúcsok halmaza, akkor $\nu(G) \geq |M| = \frac{1}{2}(|V| + |Z| - o(G - Z)) \geq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$.

Legyen M egy $\nu(G)$ méretű párosítás G-ben. Tetsz. $X \subseteq V(G)$ esetén $G - X$ minden páratlan komponensének van legalább egy olyan csúcsa,



amiből nem fut M- beli él a komponensen belül. Ezen legalább $o(G - X)$ csúcs közül legfeljebb $|X|$ csúcsnak lehet M-beli párja, ezért M biztosan fedetlenül hagy $o(G - X) - |X|$ db csúcsot. Tehát $\nu(G) = |M| \leq \min\{\frac{1}{2}(|V| + |X| - o(G - X)) : X \subseteq V(G)\}$. □

Köv: (1) Az Edmonds-algoritmus outputja max párosítás.
(2) Tutte tétele: G-nek pontosan akkor van teljes párosítása, ha nincs fedetlen csúcs, azaz ha $o(G - X) \leq |X| \;\; \forall X \subseteq V(G)$-re. □

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Biz: (1-2) Triv.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Biz:

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Biz: (3) Tfh a G kritikus gráf v csúcsába a C ptn kört fújva kapjuk G'-t és $u \in V(G')$. Ha $u \in V(G)$, akkor nézzük G-nek egy csak u-t kihagyó párosítását. Itt a v-t fedő él olyan élnek felel meg, ami C egyik csúcsát fedi. C maradék csúcsai kipárosíthatók, ezért van $(G' - u)$-nak teljes párosítása. Ha pedig $u \in V(C)$, akkor $G - v$ teljes párosítását kell kiegészíteni a C egy u-t kihagyó párosításával, és így kapjuk $G' - u$ egy teljes párosítását.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Biz: (3) Tfh a G kritikus gráf v csúcsába a C ptn kört fújva kapjuk G'-t és $u \in V(G')$. Ha $u \in V(G)$, akkor nézzük G-nek egy csak u-t kihagyó párosítását. Itt a v-t fedő él olyan élnek felel meg, ami C egyik csúcsát fedi. C maradék csúcsai kipárosíthatók, ezért van $(G' - u)$-nak teljes párosítása. Ha pedig $u \in V(C)$, akkor $G - v$ teljes párosítását kell kiegészíteni a C egy u-t kihagyó párosításával, és így kapjuk $G' - u$ egy teljes párosítását.
(4) Edmonds algoritmusában minden külső csúcsnak megfelelő ponthalmaz egy pontból (ami kritikus) a (2,3) szerinti operációk sorozatával jön létre. $\square$

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Köv: (1) Az Edmonds-algoritmus végén kapott tisztást és belső pontok halmazát G minden maximális párosítása lefedi.
(2) Ha a v csúcs egy külső ponthoz tartozik, akkor G-nek van v-t elkerülő (azaz fedetlenül hagyó) max párosítása.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Köv: (1) Az Edmonds-algoritmus végén kapott tisztást és belső pontok halmazát G minden maximális párosítása lefedi.
(2) Ha a v csúcs egy külső ponthoz tartozik, akkor G-nek van v-t elkerülő (azaz fedetlenül hagyó) max párosítása.

Biz: (1): G max párosításait az Edmonds-algoritmus végén adódó G' gráf maximális párosításaiból kapjuk a külső csúcsoknak megfelelő kritikus gráfok egy-egy max párosítását hozzávéve. Ha a külső csúcs fedetlen, akkor tetszőlegeset, ha fedett, akkor a fedő él végpontját kihagyót. Ezért G minden max párosítása csak külső pontba képződő csúcsot hagyhat fedetlenül, ahonnan (1) adódik.

Faktorkritikus gráfok

Def: A G gráf **(faktor-)kritikus**, ha G minden v csúcsa esetén van a $(G - v)$ gráfnak teljes párosítása.

Megf: (1) K_1 kritikus. Minden páratlan kör is kritikus.
(2) Kritikus gráfba élt behúzva kritikus gráfot kapunk.
(3) Kritikus gráf csúcsába ptn kört fújva kritikus gráfot kapunk.
(4) Az Edmonds-algoritmus bármely fázisában a külső csúcsokhoz tartozó ponthalmazok G-ben kritikus részgráfokat feszítenek.

Köv: (1) Az Edmonds-algoritmus végén kapott tisztást és belső pontok halmazát G minden maximális párosítása lefedi.
(2) Ha a v csúcs egy külső ponthoz tartozik, akkor G-nek van v-t elkerülő (azaz fedetlenül hagyó) max párosítása.

Biz: (2): Az Edmonds-algoritmus végén kapott G'-nek van olyan max párosítása, ami fedetlenül hagyja azt a külső csúcsot, amihez v tartozik. Ezt a fentiek szerint ki tudjuk egészíteni G egy v-t elkerülő max párosításává. $\square$

Edmonds-Gallai struktúratétel

Def: A G gráf esetén $D(G) := \{v \in V(G) : \nu(G - v) = \nu(G)\}$ jelöli a max párosítással elkerülhető csúcsokat (deficient vertices), $A(G) := N(D(G)) \setminus D(G)$ ezek szomszédait (adjacent vertices), $C(G) := V(G) \setminus (D(G) \cup A(G))$ pedig a maradék csúcsokat (covered vertices).

Edmonds-Gallai struktúratétel

Def: A G gráf esetén $D(G) := \{v \in V(G) : \nu(G-v) = \nu(G)\}$ jelöli a max párosítással elkerülhető csúcsokat (deficient vertices), $A(G) := N(D(G)) \setminus D(G)$ ezek szomszédait (adjacent vertices), $C(G) := V(G) \setminus (D(G) \cup A(G))$ pedig a maradék csúcsokat (covered vertices).

Edmonds-Gallai-struktúratétel: (1) A $G - A(G)$ gráf páros komponenseit a $C(G)$-beli, páratlan komponenseit pedig a $D(G)$-beli csúcsok alkotják. (2) $G - A(G)$ minden páratlan komponense faktor-kritikus ill. (3) $A(G)$ a Tutte-Berge-formula egy optimuma, azaz $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| + |A(G)| - o(G - A(G)))$.

Edmonds-Gallai struktúratétel

Def: A G gráf esetén $D(G) := \{v \in V(G) : \nu(G - v) = \nu(G)\}$ jelöli a max párosítással elkerülhető csúcsokat (deficient vertices), $A(G) := N(D(G)) \setminus D(G)$ ezek szomszédait (adjacent vertices), $C(G) := V(G) \setminus (D(G) \cup A(G))$ pedig a maradék csúcsokat (covered vertices).

Edmonds-Gallai-struktúratétel: (1) A $G - A(G)$ gráf páros komponenseit a $C(G)$-beli, páratlan komponenseit pedig a $D(G)$-beli csúcsok alkotják. (2) $G - A(G)$ minden páratlan komponense faktor-kritikus ill. (3) $A(G)$ a Tutte-Berge-formula egy optimuma, azaz $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| + |A(G)| - o(G - A(G)))$.

Biz: Láttuk, hogy G max párosításai által elkerülhető csúcsok (azaz $D(G)$ elemei) pontosan G külső pontokba képződő csúcsai. Ezért a belső csúcsok alkotják $A(G)$-t, és a tisztás pontjai $C(G)$-t. Láttuk, hogy $X = A(G)$-re $G - X$ minden ptn komponense egy-egy külső csúcsnak felel meg, és ugyanerre az X-re a Tutte-Berge-formula eléri a minimumát. Mivel a külső csúcsok kritikus részgráfot feszítenek, (2) is adódik. $\square$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása
- Edmonds algoritmusa és a Berge-Tutte-formula

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása
- Edmonds algoritmusa és a Berge-Tutte-formula
- faktor-kritikus gráfok, külső csúcsok faktor-kritikussága

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása
- Edmonds algoritmusa és a Berge-Tutte-formula
- faktor-kritikus gráfok, külső csúcsok faktor-kritikussága
- Edmonds-Gallai-struktúratétel

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása
- Edmonds algoritmusa és a Berge-Tutte-formula
- faktor-kritikus gráfok, külső csúcsok faktor-kritikussága
- Edmonds-Gallai-struktúratétel
- **KDDMV**: Április 30, 17:00-19:30, IB025 (`www.cs.bme.hu/konig`)

Mit tanultunk ma?

- Berge tétele maximális párosításokról
- M-alternáló erdő építése, külső csúcsok összehúzása
- Edmonds algoritmusa és a Berge-Tutte-formula
- faktor-kritikus gráfok, külső csúcsok faktor-kritikussága
- Edmonds-Gallai-struktúratétel
- **KDDMV**: Április 30, 17:00-19:30, IB025 (`www.cs.bme.hu/konig`)

Hurrá!