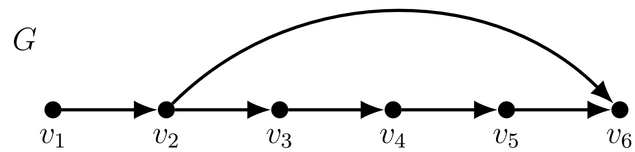
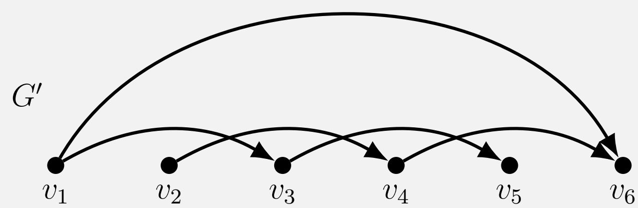
1. Adott az alábbi irányított G gráf, amivel két játékos játszik. Kezdetben kiválasztják a gráfnak egy csúcsát, és ráraknak egy korongot. A soron következő játékos a korongot **pontosan kettő** egymást követő irányított él mentén arrébb mozgatja. Az a játékos veszít, aki nem tud így lépni.



(a) Rajzoljuk fel ennek a kombinatorikus játéknak a G' gráfját.



(3 pont)

(b) Határozzuk meg ennek a kombinatorikus játéknak a Grundy-számozását. (Ne csak az eredmény, hanem a számok meghatározásának módja is egyértelműen derüljön ki.)

A Grundy-számozást dinamikus programozással határozzuk meg a G' gráf egy topologikus sorrendje szerint visszafelé haladva. *(Elég, ha a megoldásból ez látszik.)* *(2 pont)*

Ismételt forrástörlésekkel meghatározhatjuk a G' egy topologikus sorrendjét: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. *(2 pont)*

Ekkor G' Grundy-számozása a következőképpen adódik:

$$g(v_6) = \operatorname{mex} \emptyset = 0,$$
$$g(v_5) = \operatorname{mex} \emptyset = 0,$$
$$g(v_4) = \operatorname{mex} \{g(v_6)\} = \operatorname{mex} \{0\} = 1,$$
$$g(v_3) = \operatorname{mex} \{g(v_5)\} = \operatorname{mex} \{0\} = 1,$$
$$g(v_2) = \operatorname{mex} \{g(v_4)\} = \operatorname{mex} \{1\} = 0,$$
$$g(v_1) = \operatorname{mex} \{g(v_3), g(v_6)\} = \operatorname{mex} \{0, 1\} = 2.$$

(3 pont)

Név:
Neptun kód:

2. Két játékos játszik $n \times n$-es táblán hexet, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A második játékosnak lehetősége van az első lépésében a kezdőjátékos által kiszínezett mezőt a saját színére átszínezni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Tekintsük a hexnek a kezdőjátékos első lépése utáni állását. *(1 pont)*

1. eset: innen a második játékosnak van nyerő stratégiája a hexben.
Ekkor (mező-átszínezés nélkül) ezt a stratégiát követve a második játékos garantálni tudja a győzelmét a feladatbeli játékban. *(2 pont)*

2. eset: innen a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája a hexben.
Ekkor átszínezéssel a második játékos „átveheti a kezdőjátékos szerepét a hexben”, *(2 pont)* és utána a kezdőjátékos hexbeli nyerő stratégiáját követve garantálni tudja a saját győzelmét a feladatbeli játékban. *(2 pont)*

3. eset: innen semelyik játékosnak nincs nyerő stratégiája a hexben.
Mivel a hex-tétel miatt a hex nem érhet véget döntetlennel, ezért ez az eset nem történhet meg. *(2 pont)*

Tehát a második játékosnak van nyerő stratégiája a feladatbeli játékban. *(1 pont)*

3. Tekintsük az alábbi stratégiai játékot.

	X	Y
A	$(-1,1)$	$(3,0)$
B	$(4,-2)$	$(0,1)$

Jelölje p annak a valószínűségét, hogy a sorjátékos az A stratégiát játssza, valamint jelölje q annak a valószínűségét, hogy az oszlopjátékos az X stratégiát játssza.

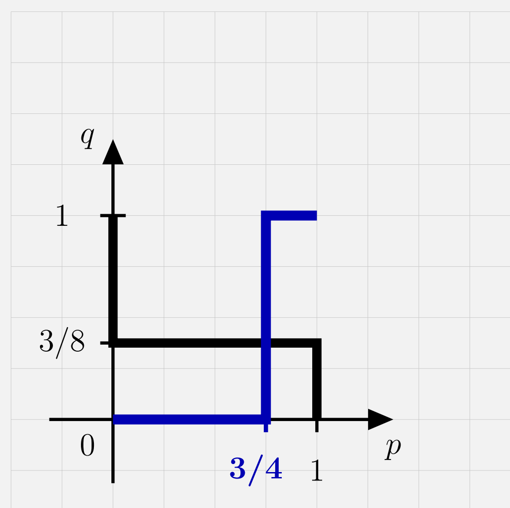
(a) Írjuk fel az oszlopjátékos $u_{\text{oszlop}}(p,q)$ nyereségfüggvényét.

$$u_{\text{oszlop}}(p,q) = 1\cdot pq + 0\cdot p(1-q) + (-2)\cdot(1-p)q + 1\cdot(1-p)(1-q) =$$
$$= 4pq - 3q - p + 1 = q(4p-3) - p + 1$$

(2 pont)

(b) A sorjátékos $u_{\text{sor}}(p,q)$ nyereségfüggvénye alapján felrajzolt függvény, ami a sorjátékos legjobb válaszait írja le, alább látható. Hogyan lehet ez alapján meghatározni, hogy az oszlopjátékosnak mikor mi a legjobb válasza? Az oszlopjátékos legjobb válaszait leíró függvényt rajzoljuk is be az ábrába.

Ha $4p-3>0$, azaz $p>3/4$, akkor az oszlopjátékos nyeresége a $q=1$ választással lesz maximális.
Ha $4p-3=0$, azaz $p=3/4$, akkor az oszlopjátékos nyeresége tetszőleges $q\in[0,1]$ választással ugyanannyi (és így maximális is) lesz.
Ha $4p-3<0$, azaz $p<3/4$, akkor az oszlopjátékos nyeresége a $q=0$ választással lesz maximális. *(4 pont)*



(2 pont)

(c) Mik lesznek a kevert Nash-egyensúlyok?

A tanultak szerint a kevert Nash-egyensúlyok éppen a legjobb válaszokat leíró függvények metszéspontjai lesznek. Azaz az egyetlen kevert Nash-egyensúly a $p=3/4$, $q=3/8$ választás. *(2 pont)*

Név:
Neptun kód:

4. Alább látható egy kétszemélyes, 0-összegű mátrixjáték nyereségmátrixa. Mutassuk meg, hogy az $\underline{x} = (0,\ 1/5,\ 4/5)$ vektor a sorjátékos, és az $\underline{y} = (7/10,\ 0,\ 3/10)^\top$ vektor az oszlopjátékos egy maximin stratégiáját írja le.

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelölje μ_{OPT} a sorjátékos maximális nyereségét a legrosszabb esetben, illetve jelölje ν_{OPT} az oszlopjátékos minimális veszteségét a legrosszabb esetben. Neumann tétele szerint $\mu_{\text{OPT}} = \nu_{\text{OPT}}$. *(3 pont)*
Ekkor

$$\frac{12}{5} = \min\left(\frac{12}{5}, \frac{19}{5}, \frac{12}{5}\right) = \min \underline{x}A \leq \mu_{\text{OPT}} = \nu_{\text{OPT}} \leq \max A\underline{y} =$$

$$= \max\begin{pmatrix} -34/10 \\ 24/10 \\ 24/10 \end{pmatrix} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}.$$

(6 pont)

Vagyis $\underline{x}$ valóban a sorjátékos, $\underline{y}$ pedig az oszlopjátékos egy maximin stratégiája. *(1 pont)*

5. Öt játékos osztozik arányosan a $[0, 1[$ intervallumon az Even–Paz-eljárással. Az első vágás után az első, a második és a harmadik játékos az $[1/5, 1[$ intervallumon osztozik. E három játékos értékelő eloszlásfüggvénye alább látható. Határozzuk meg, hogy mit kap ekkor a **harmadik** játékos.

$$f_1(x) = f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = \min(2x, 1)$$

Minden játékos megjelöli a saját értékelő eloszlásfüggvénye szerinti 1:2 arányú osztópontját az $[1/5, 1[$ intervallumon. *(2 pont)*
Ehhez az i-edik játékos azt a legkisebb $x_i \in [0, 1]$ számot keresi, amelyre

$$\mu_i\big([1/5, x_i[\big) = \frac{1}{3} \cdot \mu_i\big([1/5, 1[\big)$$

teljesül, ahol $i \in \{1, 2, 3\}$. *(Elég, ha ez a számolásból kiderül.)* *(2 pont)*
Ebből az első játékosnak

$$x_1 - 1/5 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right),$$

azaz $x_1 = 7/15$ adódik. *(1 pont)*
Mivel $f_1 = f_2$, ezért a második játékosnak $x_2 = x_1 = 7/15$ adódik. *(1 pont)*
A harmadik játékosnak pedig

$$2x_3 - \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right),$$

azaz $x_3 = 3/10$ adódik. *(2 pont)*
Mivel $3/10 < 7/15$, ezért a harmadik játékos kapja az $[1/5, 3/10[$ részt, *(2 pont)*
a $[3/10, 1[$ részen pedig az első két játékos osztozkodik tovább.

Ha valaki a 2:1 arányú osztópontokkal számol, a pontszám természetesen akkor is jár. Ebben az esetben $x_1 = x_2 = 11/15$ és $x_3 = 6/15$ adódik, vagyis a harmadik játékos az $[1/5, 6/15[= [1/5, 2/5[$ részt kapja.

Név:
Neptun kód:

6*. A $[0,1[$ intervallumon szeretne irigységmentesen osztozkodni n játékos (ahol n tetszőleges pozitív egész szám). Tudjuk, hogy az első $n-1$ játékos értékelő eloszlásfüggvénye azonos, azaz $f_1 = \ldots = f_{n-1}$, az n-edik játékoséról viszont nem tudunk semmit. Javasoljunk hatékony algoritmust a feladat megoldására, és határozzuk meg az eljárás végrehajtásához szükséges mérés- és vágás műveletek számát.

Ossza fel az első játékos a $[0,1[$ intervallumot n egyenlő részre. *(2 pont)*
Ez $n-1$ darab vágás lépéssel megtehető:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{n}, \qquad f_1(x_2) = \frac{2}{n}, \qquad \ldots, \qquad f_1(x_{n-1}) = \frac{n-1}{n}.$$
(1 pont)

Válassza ki az n-edik játékos a számára az egyik legtöbbet érő részt. *(1 pont)*
Ez $n-1$ darab mérés lépéssel meg tudja tenni:

$$\mu_n\big([0,x_1[\big), \qquad \mu_n\big([0,x_2[\big), \qquad \ldots, \qquad \mu_n\big([0,x_{n-1}[\big).$$
(2 pont)

Ezekből a számokból ugyanis már minden rész értékét ki tudja számolni:

a $[0,x_1[$ rész értéke $\mu_n\big([0,x_1[\big)$,

az $[x_1,x_2[$ részé $\mu_n\big([0,x_2[\big) - \mu_n\big([0,x_1[\big)$,

$\vdots$

az $[x_{n-2},x_{n-1}[$ részé $\mu_n\big([0,x_{n-1}[\big) - \mu_n\big([0,x_{n-2}[\big)$,

az $[x_{n-1},1[$ részé pedig $1 - \mu_n\big([0,x_{n-1}[\big)$. *(1 pont)*

Ekkor az első játékos nem lehet irigy, hiszen az egyik legnagyobb részt választotta. A többi játékos szintén nem lehet irigy senkire, hiszen számukra minden rész ugyanannyit ér. *(3 pont)*