Algoritmikus játékelmélet

Fleiner Tamás

2024. december 10.

1. Bevezetés

Ez a jegyzet a 2024/25-ös tanév első félévében VISZAC01 kód alatt futó algoritmikus játékelmélet kurzus segédanyaga. A kurzus első feléhez egyelőre nem tartozik hasonló leírás, de előbb-utóbb készül majd ilyen is.

A jelen segédanyaggal kapcsolatos mindenféle megjegyzést és kritikát köszönettel fogadok.

Fleiner Tamás

2. Szavazási eljárások

Az alábbi szavazási modellben dolgozunk. Adott a szavazók $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ és az alternatívák $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ halmaza, L pedig az A alternatívahalmaz lineáris rendezéseit jelöli. Feltesszük, hogy minden szavazó preferenciáját egy L-beli lineáris rendezés írja le (az i-dik szavazóét $\preceq_i$ jelöli), és rögzítjük, hogy a szavazás végeredménye csak ezektől a preferenciáktól függhet, ahol $a \prec_i b$ jelentése az, hogy az i szavazó számára a b alternatíva jobb az a alternatívánál. A $\preceq$ preferenciarendezés szerint legjobban preferált alternatívát $Top(\preceq)$ jelöli. *Választási profil* egy, a szavazók preferenciáit felsoroló $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ vektor. A szavazás kimenetele pedig egy függvény által meghatározozott L-beli közös preferenciarendezés vagy egy A-beli alternatíva. *Társadalmi választási szabály (TVSZ)* alatt egy $F : L^n \to L$ függvényt, *Társadalmi választási függvény (TVF)* alatt pedig egy $F : L^n \to A$ leképezést értünk.

2.1. Példa. *(1) A jóváhagyásos szavazás az az eljárás, amelyikben minden szavazó tetszőleges számú alternatívát jelölhet meg, és a nyertes alternatíva az, amelyiket a legtöbben megjelölték. (Döntetlen esetén az a legtöbb szavazatot kapó alternatívák közül a $\preceq_1$ szerinti legjobb.)*

A jóváhagyásos szavazás nem TVF, mert nem kizárólag a szavazók preferenciarendezéseitől függ a kimenetel. A jóváhagyásos szavazás tehát nem fér bele a fenti modellbe.

(2) A többségi szavazási eljárás során az alternatívákat a szerint rangsoroljuk, hogy hány szavazó számára képviselik a legjobb választást. (Döntetlen esetén $\preceq_1$ alapján döntünk.) Az így kapott az $F^T(\Pi)$ lineári rendezés a többségi választás F^T TVSZ szerinti kimenetele. Az többségi szavazáshoz tartozó f^T TVF szerinti $f^T(\Pi)$ kimenetel pedig legtöbb szavazónál első helyen szereplő alternatíva.

A többségi szavazás nagyon ügyetlen lehet, mert lehet olyan jelölt, aki mindenki számára nagyon jó, de senkinek se a legjobb, míg a legjobb helyen szereplő jelöltek mindegyike csak kevés szavazónál van az első helyen, soknál pedig csak a preferenciasorrend legvégén.

(3) A Borda-szavazás az az F^B TVSZ, ami az alternatívák Borda-pontszámainak csökkenő sorrendbe rendezésével adódik (a döntetleneket esetén $\preceq_1$ alapján rangsorolunk). Az a alternatíva Borda-pontszáma $B(a) = \sum_{i=1}^{n} B_i(a)$, ahol $B_i(a) = n - k$, ha az i-dik szavazó preferenciasorrendjében az a alternatíva a k-dik.

2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az a alternatíva* legyőzi *a b alternatívát, ha $|\{i : b \prec_i a\}| > |\{i : a \prec_i b\}|$, azaz, ha több olyan szavazó van, aki számára az a jobb b-nél, mint olyan szavazó, aki b-t preferálja a-val szemben. Az a alternatíva* Condorcet-győztes*, ha a minden más alternatívát legyőz. Az f TVF (ill. az F TVSZ)* Condorcet-konzisztens*, ha minden Π választási profil esetén teljesül hogy ha egy a alternatíva Condorcet-győztes a Π választási profil esetén, akkor $f(\Pi) = a$ (ill. $Top(F(\Pi)) = a$). Akkor Condorcet-konzisztens tehát egy TVF (ill. TVSZ), ha Condorcet-győztes alternatíva nem veszíthet.*

2.3. Definíció. *A* Copeland-szavazás *azt az F^C TVSZ-t jelenti, amelyikben az alternatívákat csökkenő Copeland-pontszám szerint rendezzük, a döntetleneket $\preceq_1$ szerint rangsorolva. Az a alternatíva* Copeland-pontszáma *$C(a) = w(a) - \ell(a)$[1], ahol $w(a)$ az a által legyőzött, $\ell(a)$ pedig az a-t legyőző alternatívák száma.*

2.4. Megfigyelés. *A Copeland-szavazás Condorcet-konzisztens.*

Bizonyítás. Ha a Condorcet-győztes, akkor $w(a) = k - 1$ és $\ell(a) = 0$, így $C(a) = k - 1$. Ha pedig nem az, akkor $w(a) \leq k-2$ és $\ell(a) \geq 0$, ezért $C(a) \leq k-2$. Tehát $Top(F^C(\Pi)) = a$. □

A továbbiakban TVSZ-októl és TVF-ektől elvárható tulajdonságokkal foglalkozunk. Szimmetrikus TVSZ esetén a $\prec_i$ szavazatok egyenértékűek, nem számít ki adta le azokat.

2.5. Definíció. *Az F TVSZ* szimmetrikus *(néha* anonim*), ha $F(\Pi) = F(\sigma(\Pi))$ teljesül minden $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ választási profil és a szavazók tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációja esetén, ahol $\sigma(\Pi) = (\preceq_{\sigma(1)}, \ldots, \preceq_{\sigma(n)})$ az a választási profil, amiben a szavazók a σ permutáció szerint helyet cserélnek. Hasonlóan, az f TVF akkor szimmetrikus, ha $f(\Pi) = f(\sigma(\Pi))$ teljesül $\forall \Pi, \forall \sigma \in S_n$ esetén.*

2.6. Megfigyelés. *Nem szimmetrikus egyetlen korábban említett TVSZ és TVF sem, ha a döntetlenek feloldásához a $\preceq_1$ preferenciarendezést használja. Ha azonban az a_i és a_j alternatívák közti döntetlent az i és j index nagyságviszonya dönti el, akkor az így módosított szabályok és függvények szimmetrikussá válnak.*

A semlegesség az a tulajdonság, hogy a TVSZ ill. TVF semmilyen módon sem különbözteti meg az alternatívákat: ha például két alternatíva a Π profilban szereplő minden $\preceq_i$ rendezésben helyet cserél, akkor az így kapott profilhoz tartozó $F(\Pi')$ úgy adódik, hogy $F(\Pi)$-ben is megcseréljük a szóban forgó alternatívákat. A semlegesség definíciója az alternatívapár cseréje mellett hasonló tulajdonságot vár el az alternatívák tetszőleges permutációja esetén.

2.7. Definíció. *Az F TVSZ* semleges *(néha* pártatlan*), ha $\sigma(F(\Pi)) = F(\Pi^\sigma)$ teljesül minden $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ választási profil és az alternatívák tetszőletes $\sigma \in S_k$ permutációja esetén, ahol a $\sigma(F(\Pi))$ preferenciasorrend az $F(\Pi)$ preferenciasorrendbeli alternatívák σ szerinti permutációjával adódik, és a $\Pi^\sigma = (\sigma(\preceq_1), \ldots, \sigma(\preceq_n))$ választási profilban szereplő $\sigma(\preceq_i)$ preferenciasorrendeket szintén a $\preceq_i$ preferenciasorrendből kapjuk az alternatívák σ szerinti permutálásával. Hasonlóan, az f TVF akkor* semleges (S)*, ha $\sigma(f(\Pi)) = f(\Pi^\sigma)$ teljesül $\forall \Pi \in L^n, \forall \sigma \in S_k$ esetén.*

[1] Ez valójában a *módosított* Copeland-pontszám: a hivatalos definíció szerint $C(a) = 2w(a) + t(a)$, ahol $t(a)$ az olyan b alternatívák száma, amelyekre a sem győzi le b-t és b sem győzi le a-t. Könnyen látható, hogy bármely alternatíva módosított Copeland-pontszáma $(|A| - 1)$-gyel kevesebb a hivatalosnál.

2.8. Megfigyelés. *Az előző megfigyelésben szimmetrikusra módosított TVSZ-ok a módosítás előtt semlegesek voltak, a módosítással azonban ez a tulajdonságuk elveszik, hiszen a választás során meghatározó tényezővé válik az alternatívák indexelés szerinti sorrendje.*

2.9. Definíció. *Az F TVSZ* egyhangú, *ha minden (a, b) alternatívapárra igaz az alábbi tulajdonság. Ha $a \preceq_i b$ minden i-re akkor $a \preceq b$ teljesül a $\preceq = F(\Pi)$ közös döntésre.*

Ha tehát F egyhangú és minden szavazó egyformán látja az a és b alternatívák viszonyát, akkor ennek az $F(\Pi)$ közös döntésükben is tükröződnie kell.

A lényegtelen alternatíváktól való függetlenség azt jelenti, hogy bármely a és b alternatívák esetén ezek közös döntés szerinti egymáshoz képesti viszonya kizárólag attól függ, hogy az egyes szavazók e két alternatíva közül melyiket preferálják. Nem számít tehát a többi alternatíva a-hoz és b-hez ill. egymáshoz képesti viszonya.

2.10. Definíció. *Az F TVSZ* független a lényegtelen alternatíváktól*, ha minden (a, b) alternatívapárra az alábbi tulajdonság teljesül. Ha $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ és $\Pi' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ olyan választási profilok, amelyikekben minden szavazó egyformán rendezi az (a, b) párt, akkor az $F(\Pi)$ és $F(\Pi')$ közös preferenciák is egyformán rendezik az (a, b) párt. Ugyanez formulákkal, precízen:*

Ha $(a \preceq_i b \iff a \preceq'_i b \quad \forall i \in N)$ akkor $(a \preceq b \iff a \preceq' b)$, ahol $\preceq = F(\Pi)$ és $\preceq' = F(\Pi')$.

2.11. Megjegyzés. *Minden F TVSZ indukálja az $f = Top(F)$ TVF-t. Ha egy TVF értelmesen kiterjeszthető az A részhalmazain értelmezett választási profilokra, akkor az f TVF segítségével definiálhatunk egy f-et indukáló F TVSZ-t az alábbi módon. Az $F(\Pi)$ preferenciarendezés legjobb eleme $b_1 = f(\Pi)$. A második legjobb elem $F(\Pi)$-ben $b_2 = f(\Pi|_{\overline{b_1}})$, ahol $\Pi|_{\overline{b_1}}$ a Π-beli preferenciarendezésekből áll, miután mindegyikből kihagyjuk a b_1 alternatívát. A harmadik legjobb alternatíva $F(\Pi)$-ben $b_3 = f(\Pi|_{\overline{b_1}, \overline{b_2}})$, és így tovább.*

A következő megfigyelés arra mutat, hogy a lényegtelen alternatíváktól való függetlenség elégséges ahhoz, hogy a TVSZ az alternatívahalmaz részhalmazain is könnyen értelmezhető legyen.

2.12. Megfigyelés. *Tegyük fel, hogy az F TVSZ független a lényegtelen alternatíváktól az A alternatívahalmazon, legyen $A' \subseteq A$ az alternatívák egy részhalmaza, valamint $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ és $\Pi' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ pedig két választási profil. Ha minden i szavazó esetén $\preceq_i |_{A'} = \preceq'_i |_{A'}$ teljesül, azaz minden szavazó ugyanúgy rangsorolja az A'-beli alternatívákat a $\preceq_i$ és $\preceq'_i$ preferenciarendezései szerint, akkor az $F(\Pi)|_{A'} = F(\Pi')|_{A'}$, vagyis az $F(\Pi)$ és $F(\Pi')$ közös rendezések is egyformán rangsorolják az A'-beli alternatívákat.*

2.13. Megjegyzés. *A fenti Megfigyelésből az is következik, hogy ha egy F TVSZ független a lényegtelen alternatíváktól, akkor F az A alternatívahalmaz részhalmazain is indukál egy TVSZ-t.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in A'$ két tetszőleges alternatíva. A Π és Π' profilokról szóló feltevés miatt bármely i szavazó ugyanúgy rangsorolja a-t és b-t $\preceq_i$ és $\preceq'_i$ szerint, ezért az F TVSZ lényegtelen alternatíváktól való függetlensége miatt a és b sorrendje ugyanaz $F(\Pi)$-ben mint $F(\Pi')$-ben. Mivel ez bármely két A'-beli alternatívára igaz, ezért $F(\Pi)$ pontosan úgy rangsorolja a teljes A' alternatívahalmazt mint $F(\Pi')$: $F(\Pi)|_{A'} = F(\Pi)|_{A'}$. $\square$

A következő segédtételhez hasznos az alábbi fogalom.

2.14. Definíció. *Az alternatívák egy $\preceq$ rendezésében a $\preceq$ szerinti legjobb és legrosszabb alternatívát* extrémnek *nevezzük.*

2.15. Lemma (Trump-lemma)**.** *Tegyük fel, hogy az F TVSZ egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól. Ha ekkor T extrém alternatíva a Π választási profilban szereplő minden $\preceq_i$ preferenciarendezésben, akkor T extrém alternatíva a közös $F(\Pi)$ rendezésben is.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy T nem extrém a $F(\Pi) =\preceq$ közös rendezésben. Ez azt jelenti, hogy $F(\Pi)$-ben van T-nél rosszabb és T-nél jobb alternatíva is, legyenek ezek $a \prec T \prec b$. Képezzük a Π' választási profilt úgy, hogy minden egyes szavazó Π-beli preferenciarendezésében a-t tesszük a legjobb alternatívává a T-től különböző alternatívák között, azaz a-t a rangsor elejére mozgatjuk azzal, hogy T-t már nem előzheti meg, ha netán T-vel kezdődne az adott rangsor.

$$
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi & \boxed{1} & \mathrm{T}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \boxed{2} & \mathrm{T}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{i}} & \mathrm{T}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{T} \\
\hline\hline
 & F(\Pi) & \ldots b \ldots \mathrm{T} \ldots a \ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi' & \boxed{1} & \mathrm{Ta}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \boxed{2} & \mathrm{Ta}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{i}} & \mathrm{Ta}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \mathrm{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \mathrm{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{T} \\
\hline\hline
 & F(\Pi') & \mathrm{a} \ldots b \ldots \mathrm{T} \ldots a \ldots \lightning
\end{array}
$$

A T extrém tulajdonsága miatt a T alternatíva viszonya az a és b alternatívákhoz ugyanaz minden $\preceq'_i$ szavazópreferencia szerint mint a módosítatlan $\preceq_i$ szerint. Ezért, ha $\preceq' = F(\Pi')$ jelöli megváltoztatott preferenciákhoz tartozó közös rangsort, akkor F-nek a lényegtelen alternatíváktól való függetlensége miatt $a \prec' T \prec' b$. Figyeljük meg ezen kívül azt is, hogy $b \prec'_i a$ teljesül minden szavazó megváltoztatott preferenciarendezése szerint, ezért az F TVSZ egyhangúsága miatt $b \prec' a$ szintén fennáll a közös rendezésre. Ezek szerint $a \prec' T \prec' b \prec' a$, ami ellentmondás. Ezzel az indirekt feltevés megdőlt, a lemmát igazoltuk. $\square$

Még egy utolsó fogalomra van szükségünk egy fontos eredmény kimondása előtt.

2.16. Definíció. *Az F TVSZ* diktatórikus*, ha van olyan $j \in N$ szavazó, hogy $F(\Pi) =\preceq_j$ teljesül minden $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ választási profil esetén. A definícióban szereplő j szavazó a* diktátor*.*

2.17. Tétel (Arrow-tétel)**.** *Ha $|A| > 2$, továbbá az F TVSZ egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor F diktatórikus.*

Bizonyítás. Legyen $T \in A$ egy tetszőleges alternatíva, és Π_1 pedig egy tetszőleges olyan választási profil, amiben minden szavazó számára T a legjobb alternatíva. Definiáljuk minden $2 \le i \le n+1$-re a Π_i választási profilt, amit úgy kapunk Π_1-ből, hogy a T alternatívát az $1, 2, \ldots i-1$ szavazók esetén a preferencialistáik elejéről a végére mozgatjuk.

$$
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi_1 & \boxed{1} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \boxed{2} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{i}} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
 & F(\Pi_1) & \mathrm{T}\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi_2 & \boxed{1} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \boxed{2} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
 & F(\Pi_2) & \mathrm{T}\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi_j & \boxed{1} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j\text{-}1}} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
 & F(\Pi_j) & \mathrm{T}\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi_{j+1} & \boxed{1} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \boxed{\mathrm{j+1}} & \mathrm{T}\ldots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
 & F(\Pi_{j+1}) & \ldots\mathrm{T}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rr@{\,:\,}l}
\Pi_{n+1} & \boxed{1} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \boxed{2} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{j}} & \ldots\mathrm{T} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \boxed{\mathrm{n}} & \ldots\mathrm{T} \\
\hline\hline
 & F(\Pi_{n+1}) & \ldots\mathrm{T}
\end{array}
$$

Az F egyhangú tulajdonsága miatt a T alternatíva $F(\Pi_1)$-ben a legjobb, $F(\Pi_{n+1})$-ben pedig a legrosszabb közös választás. A 2.15 Lemma miatt pedig a T alternatívának minden $F(\Pi_j)$ szerint extrém választásnak kell lennie. Van tehát egy olyan j szavazó, akinek a preferenciarendezése megváltoztatása során T legjobb közös választásból legrosszabbá válik. Megmutatjuk, hogy ez a j szavazó nem más, mint maga a diktátor.

Elsőként azt figyeljük meg, hogy ha Π_1 helyett egy bármilyen másik olyan Π'_1 választási profilból indultunk volna ki, amelyikben minden szavazó számára T a legjobb alternatíva, és hasonlóan definiáltuk volna a Π'_i módosított preferenciákat a T alternatíva sorrend végére helyezésével, akkor is a j-edik szavazónál történő módosítás során ugrana T a közös preferenciasorrend végére. Ennek az az oka, hogy tetszőleges a alternatíva esetén a Π_i és Π'_i profilok az a és T alternatívákat egyformán rendezik, így F-nek a lényegtelen alternatíváktól való függetlensége folytán az a és T alternatívák az $F(\Pi_i)$ és az $F(\Pi'_i)$ közös rendezésekben is ugyanúgy lesznek rendezve. Ha tehát $F(\Pi_i)$ szerint T legjobb (legrosszabb) alternatíva, akkor $F(\Pi'_i)$ szerint is T legjobb (legrosszabb) alternatíva.

Most figyeljük meg, mi történik akkor, ha a diktátorgyanúsított j szavazó csak lassan mozgatja T-t a preferencialistájának a végére (miközben az $1, \ldots, j-1$ szavazók számára T a legrosszabb, a $j+1, \ldots, n$ szavazók számára pedig T a legjobb választás. Jelölje Π_j^ℓ ebben a változtatássorozatban azt a profilt, amikor a T alternatíva a j szavazó számára az ℓ-edik legjobb választás.

$$
\begin{array}{rcl}
\Pi_j^1\ \boxed{1} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\boxed{2} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{j}} & : & \mathrm{Tabc}\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{n}} & : & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
F(\Pi_j^1) & : & \mathrm{T}\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
\Pi_j^2\ \boxed{1} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\boxed{2} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{j}} & : & \mathrm{aTbc}\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{n}} & : & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
F(\Pi_j^2) & : & \mathrm{aT}\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
\Pi_j^3\ \boxed{1} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\boxed{2} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{j}} & : & \mathrm{abTc}\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{n}} & : & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
F(\Pi_j^3) & : & \mathrm{abT}\ldots
\end{array}
\quad \ldots\ldots \quad
\begin{array}{rcl}
\Pi_j^{k+1}\ \boxed{1} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\boxed{2} & : & \ldots\mathrm{T} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{j}} & : & \mathrm{abc}\ldots\mathrm{T} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\mathrm{n}} & : & \mathrm{T}\ldots \\
\hline\hline
F(\Pi_j^{k+1}) & : & \mathrm{abc}\ldots\mathrm{T}
\end{array}
$$

Figyeljük meg, hogy az egyetlen különbség Π_j^ℓ és $\Pi_j^{\ell+1}$ között az, hogy a T altarnatíva átugrik egy x alternatívát a j szavazó preferenciasorrendjében. Bármely más y alternatíva esetén tehát y és T viszonya ugyanaz a Π_j^ℓ-beli preferenciarendezésekben, mint a $\Pi_j^{\ell+1}$-beliekben. Következésképp a közös $F(\Pi_j^\ell)$ és $F(\Pi_j^{\ell+1})$ rendezések vagy megegyeznek, vagy mindössze annyiban térhetnek el egymástól, hogy $F(\Pi_j^\ell)$-ben a T alternatíva közvetlenül megelőzi x-et, $F(\Pi_j^{\ell+1})$-ben pedig közvetlenül x után következik. Mivel $F(\Pi_j^{k+1})$-ben a T alternatíva $F(\Pi_j^1)$-hez képest k alternatívát ugrott át, ezért minden egyes kis lépésben pontosan egy alternatívát kellett átugrania. Ez pedig azt jelenti, hogy minden $F(\Pi_j^\ell)$ rendezésnek meg kellett egyeznie a j-dik játékos Π_j^ℓ szerinti rendezésével.

Igazoltuk tehát, hogy minden T alternatívához található egy $\overline{T}$-diktátornak nevezett $j(T)$ szavazó úgy, hogy tetszőleges Π választói profil esetén a közös $F(\Pi)$ rendezés a T-től különböző alternatívákon megegyezik a $j(T)$ szavazó Π-beli rendezésével.

Legyen tehát T, O és P három különböző alternatíva. Világos, hogy ha $j(T) = j(O) = j(P) = j$, akkor bármely két alternatíva közös sorrendje megegyezik a j preferenciarendezése szerinti sorrenddel. Ekkor j diktátor, és a bizonyítást befejeztük. Ellenkező esetben feltehető, hogy $j(O) \neq j(T) \neq j(P)$ (és $j(O)$ és $j(P)$ megegyezhetnek, de akár különbözők is lehetnek). Válasszuk a Π^* profilt úgy, hogy a T, O, P alternatívákon a $j(O)$ és $j(P)$ szavazók preferenciasorrendje O, T, P legyen, a $j(T)$ szavazóé pedig P, O, T, és jelölje $\preceq = F(\Pi^*)$ a közös rendezést. Ekkor $P \prec T$, mivel $j(O)$ $\overline{O}$-diktátor. A $\overline{P}$-diktátor $j(P)$ szavazó miatt $T \prec O$, végül $O \prec P$, hiszen $j(T)$ $\overline{T}$-diktátor. Ezek szerint $P \prec T \prec O \prec T$, ami ellentmondás.

Tehát $j(T) = j(O) = j(P) = j$ valóban diktátor. $\square$

Szomorú hír, hogy ha a szavazási mechanizmusnak egy közös rendezést kell eredményeznie, akkor 2-nél több alternatíva esetén csak a diktatúra képes az egyhangúság és lényegtelen alternatíváktól való függetlenség követelményének megfelelni. Jogosan merül fel a kérdés, hogy ha kevesebbet kívánunk a szavazási modelltől, nevezetesen nem TVSZ, hanem TVF határozza meg a szavazás végeredményét, akkor teljesíthetők-e a döntéshozatallal szemben támasztott természetes követelmények. A továbbiakban ezt a kérdés tárgyaljuk, és megmutatjuk, hogy az egyszerűbb modell sem nyújt vigaszt a demokráciával szemben támasztott elvárásaink elvesztése felett érzett bánatra.

2.18. Definíció. *Az $f : L^n \to A$ TVF* manipulálható*, ha van olyan $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ választási profil és $\preceq'_i$ preferenciarendezés, amire $f(\Pi) \prec_i f(\Pi_{-i}, \preceq'_i)$ teljesül. Ha egy f TVF nem manipulálható, akkor f-et szokás* taktikázásbiztosnak *is nevezni.*

Egy TVF manipulálhatósága azt jelenti, hogy bizonyos körülmények között (azaz valamely konkrét Π választási profil mellett) az egyik szavazó képes úgy meghamisítani a TVF kiszámításához megadott preferenciáit, hogy a végerdményként megszülető közös döntés a hamisító szavazó számára kedvezőbb legyen, mint az, ami az őszintén felfedett preferenciáiból adódott volna.

Azt mondjuk, hogy *az f TVF és Π választási profil mellett az $a \in A$ alternatíva az i szavazó számára elérhető*, ha van olyan $\preceq \in L$ rendezés az alternatívákon, amire $f(\Pi_{-i}, \preceq) = a$. Világos, hogy az f TVF pontosan akkor manipulálható, ha van olyan Π profil és $i \in N$ úgy, hogy az i szavazó számára elérhető egy olyan alternatíva, ami i számára jobb $f(\Pi)$-nél. Ugyanez másképpen: az f TVF pontosan akkor taktikázásbiztos, ha bármely Π profil esetén minden szavazó számára $f(\Pi)$ a legjobb elérhető alternatíva.

2.19. Lemma. *Legyen f taktikázásbiztos TVF, $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ egy tetszőleges választási profil és $\preceq'_i \in L$ szintén tetszőleges. Jelölje $\Pi' = (\Pi_{-i}, \preceq'_i)$ azt a profil, ami Π-ből az i szavazó preferenciasorrendjének $\preceq'_i$-re változtatása nyomán keletkezik. Ekkor az $f(\Pi')$ közös döntés a $\preceq'_i$ szerinti legjobb olyan alternatíva, ami i számára a Π profil mellett elérhető.*

Bizonyítás. Mivel Π-hez képest kizárólag i preferenciasorrendje változott, ezért $f(\Pi')$ olyan alternatíva, ami i számára Π mellett elérhető. Ugyanezért i számára Π mellett elérhető alternatívák megegyeznek a Π' mellett elérhető alternatívákkal. Nem létezhet tehát olyan alternatíva, ami $f(\Pi')$-nél $\preceq'_i$ szerint jobb, és egyúttal i számára Π mellett elérhető. Ezért $f(\Pi)$ a $\preceq'_i$ szerinti legjobb olyan alternatíva, ami i számára Π mellett elérhető. $\square$

Természetes elvárás egy TVF-től, hogy taktikázásbiztos legyen. Ha például az alternatívák száma $|A| = 2$ (és az egyszerűség kedvéért) a szavazók száma páratlan, akkor a többségi szavazás ilyen: attól, hogy egy szavazó a számára kevésbé előnyös alternatívát tünteti fel jobbnak, a szavazás végeredménye az ügyeskedő szavazó szempontjából csak romlani tud. Ehhez képest kiábrándító az alábbi eredmény.

2.20. Tétel (Gibbard–Satterthwaite-tétel)**.** *Ha az f TVF taktikázásbiztos, szürjektív és $|A| \geq 3$, akkor f diktatórikus.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ profilt, és vizsgáljuk meg, mit történik, ha egy i szavazó két egymást követő alternatívát felcserél a saját $\preceq_i$ rangsorában. Világos, hogy egy ilyen változtatás nyomán adódó Π' profilban i számára pontosan ugyanazok az alternatívák érhetők el, mint Π-ben. (A többi szavazó számára elérhető alternatívák nagyon is megváltozhatnak a csere nyomán, de ez most nem érdekes a számunkra.) Az 2.19 Lemma miatt $f(\Pi')$ minden esetben megegyezik $f(\Pi)$-vel, egyetlen kivételtől eltekintve: ha ugyanis $f(\Pi)$ cserél helyet a $\preceq_i$ rangsorban közvetlenül utána következő a alternatívával, és az a alternatíva Π szerint elérhető i számára, akkor $f(\Pi') = a$ lesz a közös döntés.

Ez azt jelenti, hogy ha minden szavazó buborékrendezés-szerűen a rangsora elejére mozgatja az $f(\Pi)$ közös döntést, akkor a közös döntés egyetlen csere során sem változik meg. Ugyanezért nem változik a közös döntés akkor sem, ha ezt követően a rangsor első helyén szereplő $f(\Pi)$ alternatívát nem érintő cseréket hajtanak végre a szavazók. Világos, hogy ilyen cserékkel minden olyan választói profil előállítható, amelyikben minden szavazó rangsorának élén az $f(\Pi)$ alternatíva áll. Ezért az f TVF szürjektív tulajdonságából azt kapjuk, hogy bármely $a \in A$ alternatíva esetén ha minden szavazó rangsora a-val kezdődik, akkor a közös döntésnek is szükségképpen a-nak kell lennie. Ebből pedig az következik, hogy tetszőleges Π profil esetén ha a egy $f(\Pi)$-től különböző alternatíva, akkor kell lennie olyan szavazónak, aki $f(\Pi)$-t a-nál előbbre rangsorolja: ha ugyanis a minden szavazó rangsorában megelőzné $f(\Pi)$-t, akkor nem változik meg a közös döntés attól, hogy a-t minden szavazó a rangsora elejére helyezi. Márpedig ilyenkor -mint láttuk- minden esetben a (és nem $f(\Pi)$) a közös döntés.

A továbbiakban a célunk az f TVF-nek egy F TVSZ-lyá történő kiterjesztése úgy, hogy $f(\Pi) = Top(F(\Pi))$ teljesüljön minden Π profilra.

Rögzítsünk tehát egy Π profilt. Az $F(\Pi)$ rendezés meghatározását úgy végezzük el, hogy tetszőleges a, b alternatívapárhoz meghatározzuk, hogy $a \prec b$ vagy $b \prec a$ teljesüljön a $F(\Pi)$ közös prefenciarendezésben. Ennek érdekében úgy módosítjuk minden szavazó preferenciáját, hogy az a és b alternatívákat a rangsor elejére mozgatjuk az eredeti preferencia szerinti sorrendjük megtartásával. Az így kapott Π^{ab} profilban minden a-tól és b-től különböző c alternatívát az a alternatíva minden rangsorban megelőz, ezért $f(\Pi^{ab}) \neq c$, tehát $f(\Pi^{ab}) \in \{a, b\}$ teljesül. Az a és b alternatíváknak az F TVSZ szerinti közös rangsorban történő viszonyát ezek után úgy definiáljuk $a \prec b$ ha $f(\Pi^{ab}) = b$, és $b \prec a$ ha $f(\Pi^{ab}) = a$. Láttuk hogy az $a \prec b$ és a $b \prec a$ relációk közül pontosan az egyik teljesül. Két dolgot kell még megmutatnunk: egyrészt azt, hogy a $\prec$ reláció tranzitív (így valóban egy lineáris rendezés az alternatívákon), másrészt pedig azt, hogy $Top(\prec) = f(\Pi)$.

Az utóbbi állítás igazolásához tegyük fel, hogy $a = f(\Pi)$ és legyen b egy tetszőleges, másik alternatíva. Mozgassuk most minden szavazó esetén a-t és b-t a rangsor elejére úgy, hogy az egymáshoz képesti sorrendjüket megőrizzük. A bizonyítás elején tett megfigyelésünk szerint az elvégzett cserék során nem változik meg az a és b alternatívák egymáshoz képesti viszonya közös döntés szerint. Ez azt jelenti, hogy $b \prec a = F(\Pi)$ teljesül minden a-tól különböző b alternatívára, ezért aztán $f(\Pi) = Top(\prec)$.

A tranzitív tulajdonsághoz elegendő azt megmutatni, hogy nem található három különböző a, b, c alternatíva, amire $a \prec b \prec c \prec a$ teljesül. Készítsük el a Π^{abc} profilt oly módon, hogy minden szavazó a rangsora elejére mozgatja az a, b, c alternatívákat, azoknak az eredeti rangsorban meghatározott sorrendje megtartásával. Mivel az a, b, c alternatívák minden szavazó rangsorában minden más alternatívát megelőznek, ezért $f(\Pi^{abc}) \in \{a, b, c\}$. Feltehetjük, hogy (mondjuk) $f(\Pi^{abc}) = a$. Ha most a Π^{abc} profil minden rangsorában c-t az eredeti, Π szerinti helyére helyezzük vissza, akkor ez egyrészt nem változtat a közös döntésen, másrészt pedig a Π^{ab} profilt kapjuk vissza. Ezek szerint $f(\Pi^{ab}) = a$, így az a és b alternatívák viszonya $b \prec a$. Hasonlóan, ha b-vel végezzük el azt, amit az imént c-vel tettünk, akkor a Π^{ac} profilt kapjuk, és továbbra is a marad a közös döntés, azaz $f(\Pi^{ac}) = a$, így $c \prec a$. Ezzel igazoltuk, hogy $\prec$ olyan lineáris rendezés az alternatívákon, aminek az élén az $f(\Pi)$ alternatíva áll. Az f TVF segítségével tehát meghatároztuk az F TVSZ-t.

Megmutatjuk, hogy F egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól. Legyen a és b két tetszőleges alternatíva. Ha a megelőzi b-t egy Π profil minden rangsorában, akkor a minden Π^{ab}-beli rangsor első eleme, így $f(\Pi^{ab}) = a$, azaz $b \prec a$ teljesül a $\prec = F(\Pi)$ közös rangsorra. Ezek szerint F csakugyan egyhangú.

Legyen ismét a és b két tetszőleges alternatíva, és tegyük fel, hogy a-t és b-t a Π és Π' profilok egyformán rendezik. Ekkor a Π^{ab} profilból megkapható a Π'^{ab} profil úgy, hogy minden rangsorban az $f(\Pi^{ab})$ után következő elemeket kell csak átrendezni. Láttuk, hogy ezek az átrendezések nem változtatnak a közös döntésen, így $f(\Pi^{ab}) = f(\Pi'^{ab})$, ami az F lényegtelen alternatíváktól való függetlenségét igazolja.

A fent definiált F tehát egyhangú és a lényegtelen alternatíváktól független TVSZ egy legalább három alternatívát tartalmazó alternatívahalmazon. Arrow 2.17 tétele szerint tehát F diktatórikus, és egy i szavazó a diktátor. Ekkor ugyanez az i szavazó az f TVF mellett is diktátor, ez pedig bizonyítja a tételt. $\square$

3. Árverési mechanizmusok

Az alábbi árverési modellben dolgozunk. Adott a licitálók $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ és az alternatívák A halmaza. Az i licitáló számára az $a \in A$ alternatíva értékét $\hat{v}_i(a) \in \mathbb{R}$ jelöli. Ennyi pénzt ér meg az i licitáló számára az a kimenetel, hogy a végső döntés az a alternatíva kiválasztása. Az árverés során minden licitálónak meg kell adnia egy licitet. A licit nem más, mint minden alternatívához egy licitérték hozzárendelése. Az i licitáló licitje tehát egy $v_i : A \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $v_i(a)$ jelenti az i licitálónak az a alternatívára vonatkozó licitjét. Az i licitáló lehetséges licitjeinek halmazát S_i jelöli, $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ pedig a lehetséges licitprofilok halmaza: ha $\mathbf{v} \in S$, akkor $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. (Itt is elkövetjük a jelölésrendszer korábban megszokott abúzusát, és $(\mathbf{v_{-i}}, \hat{v}_i)$-vel azt a licitprofilt jelöljük, amit $\mathbf{v}$-ből úgy kapunk, hogy az i licitáló licitjét a $\mathbf{v}$-beliről $\hat{v}_i$-re cseréljük.)

Az árverési mechanizmus egy $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ $(n+1)$-es, ahol $f : S \to A$ és $p_i : S \to \mathbb{R}$ függvények. Az $\mathcal{M}$ árverési mechanizmus a következőképp működik: a licitálók licitjei alkotta $\mathbf{v}$ licitprofil ismeretében az $f(\mathbf{v}) \in A$ alternatíva fog megvalósulni, és ezért a licitálók kifizetéseit a p függvények írják le, az i licitáló konkrétan $p_i(\mathbf{v})$ összeget fizet. Miután ez az árverés lezajlott, az i licitáló nyeresége a kimeneteli alternatíva értéke és az ezért kifizetett összeg különbsége: $u_i(\mathbf{v}) = \hat{v}_i f((\mathbf{v})) - p_i(\mathbf{v})$. Az árverési mechanizmustól egy fontos tulajdonságot, a taktikázásbiztosságot várjuk el. Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy bárhogyan is licitálnak a többiek, egyetlen licitáló sem járhat jól azzal, ha nem a valódi értékelését licitálja. Minden licitáló akkor jár tehát a legjobban, ha a licitje az alternatívák valódi értékelésével egyezik meg. A pontos definíció az alábbi.

3.1. Definíció. *Az $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ árverési mechanizmus* taktikázásbiztos*, ha $u_i(\mathbf{v}) \leq u_i(\mathbf{v_{-i}}, \hat{v}_i)$ teljesül minden $v \in S$ licitprofilra és minden $i \in N$ licitálóra.*

A továbbiakban egy speciális árverési mechanizmustípussal foglalkozunk.

3.2. Definíció. *A* Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmus *(röviden* VCG-mechanizmus*) olyan $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ árverési mechanizmus, ahol minden $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ licitprofil esetén*

1. *$f(\mathbf{v})$ a licitösszeget maximalizáló alternatíva, azaz $\forall a \in A: \sum_{i=1}^{n} v_i(f(\mathbf{v})) \geq \sum_{i=1}^{n} v_i(a)$ és*

2. $p_i(\mathbf{v}) = h_i(\mathbf{v_{-i}}) - \sum_{j\neq i} v_j(f(\mathbf{v}))$ *teljesül minden* $i \in N$ *esetén, ahol* $h_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ *függvény.*

A VCG-mechanizmus tehát árverési mechanizmusok egy osztálya. Ebből az osztályból egy konkrét mechanizmus megadása a h_i alapkifizetési függvények rögzítésével történik. Bárhogyan is adjuk meg azonban ezeket a függvényeket, a mechanizmus rendelkezik a fent elvárt tulajdonsággal.

3.3. Tétel. *A VCG-mechanizmus tetszőleges* h_i *függvények esetén taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in S$ tetszőleges licitprofil, és $i \in N$ pedig egy tetszőleges licitáló. Jelölje $\mathbf{v'} = (\mathbf{v_{-i}}, \hat{v}_i)$ azt a licitprofilt, amit az i licitáló őszinteségi rohama eredményez. Ekkor i nyereségéről az alábbiakat állapíthatjuk meg.

$$u_i(\mathbf{v'}) = \hat{v}_i(f(\mathbf{v'})) - p_i(\mathbf{v'}) = \hat{v}_i(f(\mathbf{v'})) - h_i(\mathbf{v'_{-i}}) + \sum_{j\neq i} v_j(f(\mathbf{v'})) \geq$$
$$\geq \hat{v}_i(f(\mathbf{v})) - h_i(\mathbf{v'_{-i}}) + \sum_{j\neq i} v_j(f(\mathbf{v})) =$$
$$= \hat{v}_i(f(\mathbf{v})) - h_i(\mathbf{v_{-i}}) + \sum_{j\neq i} v_j(f(\mathbf{v})) = \hat{v}_i(f(\mathbf{v})) - p_i(\mathbf{v}) = u_i(\mathbf{v}) \ ,$$

ahol az első két egyenlőség közvetlenül adódik u_i és p_i definíciójából az ezt követő egyenlőtlenség pedig abból, hogy a $\mathbf{v'}$ licitprofil mellett az $f(\mathbf{v'})$ alternatíva maximalizálja a licitösszeget. Felhasználtuk még, hogy $\mathbf{v_{-i}} = \mathbf{v'_{-i}}$, és az utolsó két egyenlőség is a definíció közvetlen alkalmazása. A lánc eleje és vége közötti egyenlőtlenség a taktikázásbiztos tulajdonságot igazolja. □

Bár a tétel szerint minden VCG-mechanizmus taktikázásbiztos, az osztályban található konkrét mechanizmusokkal szemben lehetnek jogos ellenvetések. Például a $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$ választás esetén ha a v_i licitek pozitívak, akkor a licitálók azon túl, hogy jól járnak a kiválasztott alternatívával, még negatív összeget is fizetnek ezért. Akkor lehet tehát megvalósítani egy ilyen mechanizmust, ha valahonnan a rendszeren kívülről valaki kifizeti ezt az összeget a licitálóknak. Ez általában irreális elvárás. Egy konkrét VCG-mechanizmust akkor nevezünk szubvenciómentesnek, ha $p_i(\mathbf{v}) \geq 0$ teljesül minden $\mathbf{v} \in S$ licitprofil és minden $i \in N$ licitáló esetén.

Egészen másfajta probléma adódhat abból, ha a h_i alapkifizetés túl magas. Ekkor ugyanis hiába taktikázásbiztos a mechanizmus, előfordulhat, hogy egy vagy több licitálónak többet kell fizetnie annál, mint amit a győztes alternatíva számára képvisel, így egyiküknek sem érdeke az árverésben való részvétel. Azonban ez nem történhet meg akkor, ha a mechanizmus veszteségmentes, ami azt jelenti, hogy ha egy licitáló őszintén licitál, akkor nem érheti veszteség. Formálisan: ha a $\mathbf{v} = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ licitprofilban az i licitáló őszinte (azaz $v_i = \hat{v}_i$), akkor $u_i(\mathbf{v_{-i}}, \hat{v}_i) \geq 0$ vagy, ami ezzel ekvivalens, $p_i(\mathbf{v}) \leq \hat{v}_i(f(\mathbf{v}))$ áll fenn. Az alábbi szabály a két fent említett problémát küszöböli ki.

3.4. Definíció. *A* Clarke-szabály *által meghatározott* $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ *VCG-mechanizmusban a* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *licitprofil mellett* i *alapkifizetése* $h_i(\mathbf{v}) = \max\{\sum_{j\neq i} v_j(a) : a \in A\}$.

A Clarke-szabály szerint végrehajtott VCG árverés esetén tehát az i által fizetett összeg a megegyezik azzal a „veszteséggel”, amit i a jelenlétével okoz a többieknek. Ha ugyanis i nem lenne jelen az árverésen, akkor az az alternatíva győzne, amelyik a maximális licitösszeget éri el, de csak az i-től különböző licitálók körében. Az a tény, hogy i is részt vesz az árverésen azt eredményezheti, más alternatíva győz, mint ha nem venne részt. Ezáltal a többiek licitösszege a győztes alternatívára kevesebb az i licitáló részvétele esetén mint nélküle. Ezért kell i-nek a Clarke-szabály alkalmazásakor azt a különbséget kell megfizetnie, amennyivel kevesebbre értékeli a többi licitáló együttese az i részvétele esetén győztes alternatívát az i részvétele nélkül adódó győztesnél.

3.5. Állítás. *Ha $\hat{v}_i \geq 0$ teljesül minden $i \in N$ licitálóra, akkor az a Clarke-szabály szerinti VCG-mechanizmus szubvenció- és veszteségmentes.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} \in S$ tetszőleges licitprofil. Ekkor

$$\sum_{j \neq i} v_j(f(\hat{\mathbf{v}})) \leq \max\{\sum_{j \neq i} v_j(a) : a \in A\} = h_i(\mathbf{v}) \ ,$$

ezért $p_i(\hat{\mathbf{v}}) = h_i(\mathbf{v}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(\mathbf{v})) \geq 0$, tehát a mechanizmus szubvenciómentes.

Tegyük fel most, hogy i őszintén licitál, azaz $v_i = \hat{v}_i$ és $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Ekkor a Clarke-szabály, $\hat{v}_i$ nemnegativitása és f definíciója alapján

$$h_i(\mathbf{v_{-i}}) = \max\{\sum_{j \neq i} v_j(a) : a \in A\} \leq \max\{\hat{v}_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) : a \in A\} =$$
$$\max\{\sum_{j=1}^{n} v_j(a) : a \in A\} = \sum_{j=1}^{n} v_j(f(\mathbf{v})) = \hat{v}_i(f(\mathbf{v})) + \sum_{j \neq i} v_j(f(\mathbf{v})) \ ,$$

így $p_i(\mathbf{v}) = h_i(\mathbf{v_{-i}}) - \sum_{j \neq i} \hat{v}_j(f(\mathbf{v})) \leq \hat{v}_i(f(\mathbf{v}))$, ami a veszteségmentességet igazolja. $\square$

4. Újraelosztási feladatok

A következő –újraelosztási– feladatban minden játékos rendelkezik egy-egy jószággal, és bár ennél többre nincs ugyan szüksége, irigyelheti más játékos jószágát. Úgy szeretnénk újraelosztani a játékosok között a javaikat, hogy senki se járjon rosszul (ami önmagában nem nehéz: mindenki tartsa meg a maga jószágát), és emellett mindenki a számára lehető legjobb kapja a számára elérhető jószágok közül. Az irodalomban lakáspiac néven fut ez a modell, aholis a játékosok $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazának elemei a lakástulajdonosok, a jószágok pedig a lakásaik. Minden lakástulajdonos rendelkezik egy preferenciarendezéssel a piacon található lakásokon (az i tulajdonosét $\preceq_i$ jelöli), ami formálisan egy lineáris rendezés az N halmazon: $j \prec_i k$ azt jelenti, hogy az i tulajdonos számára a k tulajdonos lakása jobb, mint a j tulajdonosé. A probléma inputja tehát a tulajdonosok N halmaza és a $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n) \in P^n$ preferenciaprofil, ahol P jelöli az N halmaz lineáris rendezéseinek halmazát. Az újraelosztási mechanizmus egy $f : P^n \to S_N$ leképezés, ahol S_N az N halmaz permutációinak halmazát jelöli. A mechanizmus által szolgáltatott konkrét újraelosztást az $f(\Pi) = \sigma$ output-permutáció írja le: $\sigma(i) = j$ azt jelenti, hogy az i lakástulajdonos a j tulajdonos lakását kapja a sajátjáért cserébe (amit persze a $\sigma^{-1}(i)$ tulajdonos fog elfoglalni). Az újraelosztási mechanizmussal kapcsolatban természetes az alábbi elvárás.

4.1. Definíció. *Legyen $\sigma \in S_N$ egy rögzített újraelosztás a fent definiált újraelosztási feladatban. Lakástulajdonosok egy $B \subseteq N$ halmaza a σ* újraelosztást gyengén blokkoló koalíció*t alkot, ha a B-beli tulajdonosok el tudják osztani a saját lakásaikat egymás között úgy, hogy* *senki se járjon rosszabbul, mint a σ újraelosztás mellett, és legalább egy B-beli tulajdonos helyzete határozottan javuljon σ-hoz képest. Formálisan: a B halmaz akkor blokkolja gyengén σ-t, ha van olyan $\pi \in S_B$ permutáció B-n és olyan $i \in B$ tulajdonos, hogy $\sigma(i) \prec_i \pi(i)$ mellett $\sigma(j) \preceq_j \pi(j)$ teljesül minden $j \in B$ lakástulajdonosra.*

Az erős mag *mindazon $\sigma \in S_N$ újraelosztásokból áll, amelyeket egyetlen koalíció sem blokkol gyengén.*

Természetes igény, hogy az újraelosztási feladatra erős magbeli megoldást találjunk. Figyeljük meg, hogy az egyfős gyengén blokkoló koalíció hiánya azzal ekvivalens, hogy az újraelosztás során egyetlen lakástulajdonos sem kerül olyan lakásba, amit a saját, eredeti lakásánál rosszabbnak ítél.

A továbbiakhoz szükségünk van az alábbi fogalomra. A lakástulajdonosok tetszőleges S halmazához definiáljuk a $D(S) = (S, A(S))$ irányított segédgráfot, ahol $A(S) = \{ij : i, j \in S \text{ és } k \preceq_i j \ \forall k \in S\}$. A segédgráf irányított élei úgy kapjuk tehát, hogy minden S-beli lakástulajdonos rámutat arra az S-beli tulajdonosra, akinek a lakása a legjobban tetszik neki. A $D(S)$ segédgráf nem feltétlenül egyszerű, hiszen ha például i a saját lakását tartja a legjobbnak az S-beli tulajdonosok lakásai közül, akkor $D(S)$-ben irányított hurokél illeszkedik az i csúcsra. Mivel a $D(S)$ digráf minden csúcsának pontosan 1 a kifoka, ezért $D(S)$-ben bizonyosan van irányított kör, ami elfajuló (tehát hurokél vagy egy oda-vissza irányított élpár) is lehet. (Egy konkrét kör megtalálásához tetszőleges csúcsból indulva addig kell az irányított élek mentén haladni, amíg egy korábban bejárt csúcsba nem érünk.) Jelölje $C(D(S))$ a $D(S)$-beli irányított körök csúcshalmazainak unióját.

Az alábbi felső körcsere (angolul top trading cycles, röviden TTC) algoritmus az alábbiak szerint keres a fenti újraosztási feladatban egy újraelosztást.

1. Legyen $S_1 = N$, $D_1 = D(S_1)$ és $i = 1$.
2. Ha $S_i = \emptyset$, akkor az algoritmus véget ér.
3. Ha $S_i \neq \emptyset$, akkor $N_i = C(D_i)$ és $S_{i+1} = S_i \setminus N_i$.
4. Definiáljuk a σ premutációt N_i elemein úgy, hogy $\sigma(j) = k$, ahol $jk \in A(S_i)$.
5. $i = i + 1$, GoTo 2.

Szavakban: az algoritmus ℓ-edik fázisában minden résztvevő lakástulajdonos rámutat a számára legszimpatikusabb lakás tulajdonosára. Azonosítjuk az N_ℓ halmazt, amit mindazon lakástulajdonosok alkotnak, akik egy kör mentén egymásra mutatnak. (Akár több kör is lehet N_ℓ-ben.) Az N_ℓ-beli lakástulajdonosok a köreik mentén lakást cserélnek, és távoznak a piacról. (Ezt a lépést nevezzük az adott körök eliminálásának.) Ezzel véget ér az ℓ-edig fázis, és a következő, $(\ell + 1)$-edik fázis kezdődik, aholis a megmaradó lakástulajdonosok hajtják végre a fenti eljárást. Az algoritmus akkor ér véget, amikor mindenki távozott a piacról.

A felső körcsere algoritmusnak arra a fontos tulajdonságára mutatunk rá először, hogy ha a tulajdonosok egy B részhalmazának valamely egymás közti lakáscseréje során egy i tulajdonos a felső körcsere algoritmusban kapott lakásnál jobb lakáshoz jut, akkor van olyan j tulajdonos is a B halmazban, aki a B halmazon belüli cserje során a felső körcseréhez képest határozottan rosszabbul jár.

4.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $\sigma \in S_N$ a felső körcsere algoritmus outputja, $\pi \in S_B$ pedig olyan permutáció a $B \subseteq N$ halmazon, amire $\sigma(i) \prec_i \pi(i)$ teljesül egy $i \in B$ tulajdonosra. Ekkor van olyan $j \in B$ tulajdonos, akire $\pi(j) \prec_j \sigma(j)$ teljesül.*

Bizonyítás. A felső körcsere algoritmus során minden tulajdonos valamikor távozik a piacról. Azt mondjuk, hogy a j tulajdonos indexe $\varphi(j) = k$, ha j a k-adik fázisban távozik, azaz ha $j \in N_k$. Figyeljük meg, hogy ha $\varphi(j) = k$, akkor a felső körcsere algoritmus futása folytán a j tulajdonos számára legjobb olyan lakás, amelyiknek a tulajdonosa az $N_k \cup N_{k+1} \cup \dots$ halmazban van éppen az általa megszerzett $\sigma(j)$ tulajdonos lakása. Ezért ha $\sigma(i) \prec_i \pi(i)$, akkor az indexükre $\varphi(\pi(i)) < \varphi(i)$ teljesül, azaz az i tulajdonos számára a π permutációban kiosztott lakás tulajdonosa az i tulajdonosnál hamarabb hagyta el a piacot a felső körcsere algoritmus futása során. Ezért abban a körben, amelyik mentén az i tulajdonos a π permutáció szerint lakást cserél, lennie kell egy olyan j tulajdonosnak is, aki a TTC során korábban hagyta el a piacot, mint a π szerint kapott lakásának a tulajdonosa, azaz akire $\varphi(j) < \varphi(\pi(j))$ áll fenn. A bizonyítás elején tett megfigyelésünk miatt ekkor $\pi(j) \prec_j \sigma(j)$, vagyis j rosszul jár a felső körcseréhez képest. $\square$

A következő eredmény a felső körcsere algoritmus talán legfontosabb tulajdonsága.

4.3. Tétel (Shapley–Scarf-tétel)**.** *A fent leírt bármely újraelosztási feladat erős magja pontosan egy permutációt tartalmaz, mégpedig a felső körcsere algoritmus outputját.*

Bizonyítás. Elsőként azt igazoljuk, hogy a felső körcsere algoritmus σ outputja az erős magban van, vagyis σ mellett nincs gyengén blokkoló koalíció. Legyen ugyanis $B \subseteq N$ a tulajdonosok egy tetszőleges részhalmaza, és tegyük fel, hogy $\pi \in S_B$ olyan permutáció B-n, amire $\sigma(i) \prec_i \pi(i)$ áll fenn egy $i \in B$ tulajdonosra. Ekkor a 4.2 Lemma miatt van olyan $j \in B$ tulajdonos, akire $\pi(j) \prec_j \sigma(j)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy B nem lehet gyengén blokkoló koalíció. Az erős mag tehát valóban tartalmazza a felső körcsere algoritmus σ outputját.

A következő célunk annak belátása, hogy a magban nem lehet a felső körcsere algoritmus outputjától különböző permutáció. Legyen $\pi \in S_N$ tetszőleges, a felső körcsere algoritmus σ outputjától különböző permutáció, és legyen $i \in N$ egy olyan tulajdonos, akire $\sigma(i) \neq \pi(i)$ teljesül és emellett az $\varphi(i)$ indexe a lehető legkisebb. Megmutatjuk, hogy ha $\varphi(i) = k$, akkor a felső körcsere futása során definiált N_k gyengén blokkolja a π permutációt.

Álljon ugyanis a σ_k permutáció mindazon ciklusokból, amelyek mentén az N_k-beli tulajdonosok elcserélték a lakásaikat a felső körcsere algoritmus k-adik fázisában, amikor elhagyták a piacot. Tegyük fel, hogy egy $j \in N_k$ tulajdonosra $\sigma_k(j) \neq \pi(j)$. Ekkor $\sigma_k(j) \prec_j \pi(j)$ esetén a 4.2 Lemma bizonyításának elején szereplő megfigyelés miatt $\varphi(\pi(j)) < \varphi(j) = k$ teljesül. Ezért annak a körnek, ami mentén j a π permutáció szerint lakást cserél, egy olyan j' tulajdonost is tartalmaznia kell, akire $\varphi(j') = \varphi(\pi(j)) < k$ és $\pi(j') \neq \sigma_k(j')$ teljesül. Ez ellentmond i választásának.

Ezek szerint $\pi(j) \prec_j \sigma_k(j)$ áll fenn minden olyan $j \in N_k$ tulajdonosra, akire $\sigma_k(j) \neq \pi(j)$. Mivel i egy ilyen tulajdonos, ezért N_k a σ_k permutáción keresztül gyengén blokkolja a π permutációt, ami tehát nem lehet az erős magban. Ezek szerint az erős magnak valóban csak egyetlen egy eleme van, mégpedig a felső körcsere algoritmus σ outputja. $\square$

Nagyon ígéretes tehát a TTC algoritmus, hiszen valamilyen értelemben a lehető legjobb megoldást találja meg a vizsgált lakáspiac-modellben megfogalmazott újraelosztási feladatra. A továbbiakban erről az algoritmusról, mint mechanizmusról mutatjuk meg, hogy igazmondásra ösztönöz. Az alábbi formális definíció szerint egy mechanizmus akkor manipulálható, ha van olyan preferenciaprofil, ami mellett egy lakástulajdonos jobb lakáshoz tud jutni a mechanizmuson keresztül, ha alkalmas módon meghamisítja a saját preferenciáit.

4.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a lakáspiac-modellben megfogalmazott újraelosztási feladathoz tartozó $f : P^n \to S_N$ mechanizmus* manipulálható*, ha van olyan $\Pi = (\preceq_1, \dots, \preceq_n) \in P^n$ preferenciaprofil és olyan $\preceq'_i$ preferenciarencezés, amire $f(\Pi)(i) \prec_i f(\Pi_{-i}, \preceq'_i)(i)$, teljesül.*

Az f mechanizmus akkor taktikázásbiztos*, ha nem manipulálható.*

4.5. Tétel. *A felső körcsere algoritmus taktikázásbiztos a lakáspiac-modellben megfogalmazott újraelosztási feladatra.*

A 4.5 Tételt helyett a taktikázásbiztos tulajdonság egy erősebb változatát igazoljuk. Egy mechanizmus akkor csoportosan taktikázásbiztos, ha a lakástulajdonosok egyetlen részhalmaza sem képes úgy meghamisítani a preferenciáit, hogy a mechanizmus futtatása után egyikük se járjon rosszabbul, mint a valódi preferenciáik megadásával, de legyen közöttük legalább egy olyan lakástulajdonos, aki határozottan profitál a hamisításból.

4.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a lakáspiac-modellben megfogalmazott újraelosztási feladathoz tartozó $f : P^n \to S_N$ mechanizmus* csoportosan manipulálható*, ha van olyan N-hez tartozó $\Pi = (\preceq_1, \dots, \preceq_n) \in P^n$ preferenciaprofil, olyan $M \subseteq N$ tulajdonoshalmaz és olyan M-hez tartozó $\Pi_M \in P^{|M|}$ preferenciaprofil, amelyekre $f(\Pi)(j) \preceq_j f(\Pi_{-M}, \Pi_M)(j)$, teljesül minden $j \in M$ tulajdonosra és van olyan $i \in M$ tulajdonos, akire $f(\Pi)(i) \prec_i f(\Pi_{-M}, \Pi_M)(i)$ áll fenn.*

Az f mechanizmus csoportosan taktikázásbiztos*, ha nem manipulálható csoportosan.*

A fő eredmény igazolásához szükségünk van a TTC egy hasznos tulajdonságára.

4.7. Megfigyelés. *Tegyük fel, hogy az N tulajdonoshalmazon Π preferenciaprofil mellett futtatott felső körcsere algoritmus az egyik fázisában eliminálja a C kört. Ekkor ha a felső körcsere algoritmust az $N \setminus C$ halmazon futtatjuk az $N \setminus C$-re megszorított Π preferenciaprofil mellett, akkor az outputként kapott σ' permutációhoz hozzávéve a C cserekört, a σ permutációt kapjuk vissza.*

Bizonyítás. Figyeljük meg a TTC futtatását az N halmazon. Tegyük fel, hogy a TTC a C kört az ℓ-edik fázisban eliminálta, azaz $C \subseteq N_\ell$. Nevezzünk egy, a futtatás során eliminált C' kört *korainak*, ha a TTC C'-t az $(\ell + 1)$-edik fázis előtt eliminálta, és hívjuk *későinek*, ha C' eliminálása az ℓ-edik fázis után történt.

Futtassuk TTC alábbi módosítását az $N \setminus C$ halmazon. A futtatás során azzal a megszorítással élünk, hogy csak akkor eliminálunk késői kört, ha már nincs eliminálható korai kör. Ez a módosítás minden egyes korai kört előbb-utóbb megtalál és eliminál. Miután ez megtörtént, pontosan ahhoz az állapothoz érkezünk, ahova az N-en futtatott TTC közvetlenül a C kör eliminálása után került. Ezért innentől sorra tudjuk eliminálni a késői köröket. Az $N \setminus C$-n futtatott TTC tehát C kivételével ugyanazokat a köröket eliminálja, mint az N-en futattott TTC. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. □

4.8. Tétel. *A felső körcsere algoritmus csoportosan taktikázásbiztos a lakáspiac-modellben megfogalmazott újraelosztási feladatra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a felső körcsere algoritmus outputja a $\sigma = f(\Pi)$ permutáció, $M \subseteq N$ a lakástulajdonosok egy tetszőleges részhalmaza és és $\Pi_M \in P^{|M|}$ egy preferenciaprofil M-en. Futtassuk a felső körcsere algoritmust a Π és a $\Pi' = (\Pi_{-M}, \Pi_M)$ profilokon, utóbbi esetben az M-beli tulajdonosok Π-beli preferenciáit cseréljük ki a Π_M-beliekre. Azt fogjuk igazolni, hogy ha $\sigma' = f(\Pi') \neq \sigma$, akkor van olyan M-beli tulajdonos, aki rosszabb lakást kap az ügyeskedés miatt, azaz $\sigma'(i) \prec_i \sigma(i)$.

A 4.7 Megfigyelés miatt a Π-n ill. Π'-n futtatott TTC által eliminált közös körökben szereplő tulajdonosok elhagyásával elérhetjük, hogy a felső körcsere algoritmus futtatásával kapott σ és σ' kimenetekben szereplő körök páronként különbözők legyenek. Legyen tehát C a legelső cserekör, amit a Π profilon futtatott felső körcsere algoritmus megtalál. A feltevés miatt C-ben van olyan i tulajdonos, akire $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$, azaz különböző lakást kap, mint ha Π'-n futtatnánk a TTC-t. Ekkor $\sigma'(i) \prec_i \sigma(i)$, hiszen $\sigma(i)$ első helyen áll az i tulajdonos preferenciarendezésében. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\preceq'_i \neq \preceq_i$, azaz az i tulajdonos nem a Π-beli preferenciáival vesz részt a TTC-ben, ezért aztán $i \in M$. Ezek szerint az M-beli tulajdonosok nem tudják sikeresen manipulálni a TTC algoritmust, ez pedig a tételben állított csoportos taktikázásbiztosságot igazolja. □

Rámutatunk végül a felső körcsere algoritmus egy másik fontos alkalmazási lehetőségére.

4.9. Definíció. *Az N tulajdonoshalmaz és $\Pi = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ preferenciaprofil által meghatározott lakáspiacon a $p : N \to \mathbb{R}_+$ leképezés és $\sigma \in S_N$ együttesét* piaci egyensúlynak *nevezzük, ha $p(\sigma(i)) \leq p(i)$ mellett $i \preceq_i j \Rightarrow p(j) > p(i)$ teljesül minden $i, j \in N$ esetén.*

A fenti definícióban árakat rendelünk a piacon lévő lakásokhoz ($p(i)$ jelöloi az i tulajdonos lakásának árát), és $\sigma(i)$-vel jelöljük annak a lakásnak a tulajdonosát, amelyik az i tulajdonos számára a legjobb a sajátjánál nem drágább lakások közül. A piaci egyensúly azt jelenti, hogy az így definiált σ az N halmaz egy permutációja, azaz olyan árazást sikerült találni a lakásokra, amelynek hatására a tulajdonos egyszerre meg tudják venni az számukra elérhető legjobb lakást. Világos, hogy egy piaci egyensúly árfüggvénye már egyértelműen meghatározza az egyensúlyhoz tartozó σ permutációt. Megmutatjuk, hogy ezzel egyúttal az erős magot is megadtuk.

4.10. Lemma. *Tegyük fel, hogy (p, σ) piaci egyensúly az (N, Π) lakáspiacon, és C egy olyan kör, aminek a mentén a tulajdonosk lakást cserélnek a σ permutációban. Ekkor $p(i) = p(j)$ teljesül minden $i, j \in C$ tulajdonosra, azaz a piaci egyensúlyban szereplő lakáscserék során minden tulajdonos a lakásának a teljes vételárát az új lakására fordítja.*

Bizonyítás. A piaci egyensúly definíciója szerint a C-beli tulajdonosok mindegyike legfeljebb annyit fizet az új lakásáért, mint amennyit a saját lakásáért kap. Egyúttal az is igaz, hogy a C-beli tulajdonosok által összességében kifizetett pénzmennyiség megegyezik a C-beli tulajdonosokhoz befolyó összeggel. Nem történhet meg tehát, hogy valaki szigorúan többet kap a lakásáért, mint amennyit az új lakására költ. Mindeneki az új lakásába forgatja tehát a saját lakása teljes vételárát. □

4.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy (p, σ) piaci egyensúly az (N, Π) lakáspiacon. Ekkor σ az erős magban van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tulajdonosok $B \subseteq N$ halmaza úgy tudja egymás között elcserélni a lakásait egy $\pi \in S_B$ permutáció mentén, hogy ennek során egy $i \in B$ tulajdonos jobban jár, mint a σ szerinti cserével, azaz $\sigma(i) \prec_i \pi(i)$. Mivel $\sigma(i)$ az i számára legjobb olyan lakás, ami nem drágább a saját lakása $p(i)$ áránál, ezért a $\pi(i)$ tulajdonos lakása biztosan drágább az i tulajdonsénál: $p(i) < p(\pi(i))$. A π permutáció mentén tehát az i tulajdonos egy, a sajátjánál drágább lakásba költözik.

Kell lennie tehát olyan $j \in B$ tulajdonosnak is, aki a saját lakásánál olcsóbb lakásba kerül a π permutáció által leírt cseresorozat után: $p(\pi(j)) < p(j)$. A piaci egyensúly definíciója miatt egyrészt $\sigma(j)$ a legjobb olyan lakás, ami j számára elérhető (azaz aminek az ára nem több j lakása áránál), másrészt a 4.10 Lemma miatt a $\sigma(j)$ lakás ára megegyezik j saját lakásának árával: $p(j) = p(\sigma(j))$. Ezért $p(\pi(j)) < p(j) = p(\sigma(j))$, azaz j a sajátjánál olcsóbb lakásba költözik, így a π cserével rosszabbul jár, mint a σ cserével. Következésképp a tulajdonosok egyetlen B részhalmaza sem alkothat σ-ra nézve gyengén blokkoló koalíciót, tehát σ csakugyan az erős magban van. □

A piaci egyensúly nagyszerű dolog, hiszen anélkül kényszeríti ki a magmegoldást, hogy a tulajdonosoknak fázisok hosszú során kelljen egymásra mutogatniuk. Természetes kérdés, hogy vajon minden esetben van-e a lakáspiacon piaci egyensúly. És ha van, akkor ismerünk-e hatékony algoritmust piaci egyensúly keresésére. A válasz mindkét esetben pozitív.

4.12. Tétel. *Tetszőleges (N, Π) lakáspiac esetén található (p, σ) piaci egyensúly.*

Bizonyítás. Futtassuk le a felső körcsere algoritmust az (N, Π) inputon. Az output σ permutáció mellett megkapjuk a tulajdonosok halmazának egy $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_t$ partícióját, ahol N_ℓ a piacról az ℓ-edik fázisban távozó tulajdonosok halmaza. Válasszunk $p_1 > p_2 > \ldots > p_t > 0$ számokat, és definiáljuk az árfüggvényt úgy, hogy $p(i) = p_k$ ha i indexe k, azaz, ha $i \in N_k$. Ezen árazás szerint egy lakás annál drágább, minél korábbi fázisban távozott a tulajdonosa a piacról. Azt állítjuk, hogy az így definiált (p, σ) piaci egyensúly.

Ehhez pusztán azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in N_k$ tulajdonos esetén az i számára elérhető legjobb lakás tulajdonosa $\sigma(i)$. Ez pedig abból következik, hogy az i számára nem elérhető (túl drága) lakások pontosan azok, amik az i cseréje előtt kikerültek a piacról, azaz az $N_1 \cup \ldots N_{k-1}$-beli tulajdonosok lakásai. A felső körcsere folytán pedig az $N \setminus (N_1 \cup \ldots N_{k-1})$-beli tulajdonosok lakásai közül a $\sigma(i)$ tulajdonos lakása az i számára a legjobb, ezért (p, σ) csakugyan piaci egyensúly. □

5. Stabil párosítások

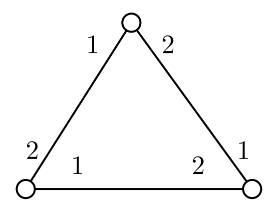
Az eddigi modellekben a közösség egészét érintő döntéseket úgy próbáltuk meghozni, hogy vagy valamiféle konszenzus legyen a döntésről a játékosok között (szavazás esetén), vagy megfizettettük az egyes játékosokkal a helyzetüknek a döntés hatására történő javulását (árverések esetében), vagy pedig természetben (a lakásukkal) kellett fizetniük azért, hogy javuljon a helyzetük. A most következő modellben is szeretne mindenki a lehető legjobban járni, de itt az egyes játékosok célja nem valamiféle konkrét vagyontárgy megszerzése, hanem az egymással való kapcsolataikkal üzletelnek, és ebből próbálja mindenki kihozni a maximumot.

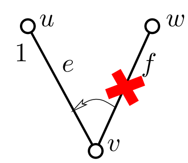
Az alábbi házassági modellben dolgozunk. A játékosok mindegyike vagy fiú vagy lány és a köztük lehetséges házasságokat egy G páros gráf írja le: ennek színosztályai a fiúk F és a lányok L halmazai, és egy $f\ell$ él jelentése az, hogy f és ℓ között lehetséges a házasság. Minden a játékos rendelkezik egy $\preceq_a$ lineáris rendezéssel az a-ra illeszkedő éleken, azaz a potenciális házastársain. A cél egy M párosítás mentén úgy összeházasítani a játékosokat, hogy lehetőleg senki se legyen elégedetlen. Ez utóbbi feltétel most a maghoz tartozást jelenti, azaz ne legyen az M párosítás mellett blokkoló koalíció. Játékosok egy B részhalmaza akkor *blokkoló koalíció M-re nézve* ha a B-beli játékosok képesek arra, hogy önerőből javítsák a helyzetüket, azaz ha van olyan N párosítás B-n, ami egyetlen B-beli játékos számára sem rosszabb M-nél, de van legalább egy olyan B-beli b játékos, aki N-nel jobban jár, mint M-mel. Utóbbi kitétel azt jelenti, hogy b jobb párt kap N-ben, mint M-ben, vagy pedig b fedetlen M-ben, de van párja N-ben.

Vizsgáljuk meg, hogyan is néz ki egy blokkoló koalíció! Tegyük fel, hogy a B koalíció az N párosítás mentén blokkolja az M párosítást. Van tehát egy olyan $ba \in N$ él, amivel b jobban jár az M-beli helyzetéhez képest. Ez azt jelenti, hogy a nem b-vel áll párban M-ben, és mivel $a \in B$ is teljesül, ezért a-nak is jobban kell járnia a ba éllel, mint M-mel. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges B blokkoló koalíció tartalmaz egy kétfős blokkoló koalíciót. Ezért a maghoz tartozás eldöntésekor a fenti definíció helyett elegendő csupán annyit megkövetelni, hogy ne legyen blokkoló él, azaz kétfős blokkoló koalíció.

5.1. Definíció. *Adott a $G = (V, E)$ gráf és minden $v \in V$ csúcsához a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán a v csúcs preferenciáját leíró $\preceq_v$ lineáris rendezés. Azt mondjuk, hogy v számára az e él* jobb *az f élnél, ha $f \preceq_v e$. A G gráf M párosítása mellett az uv élt akkor nevezzük tehát* blokkoló élnek*, ha u és v is jobban jár az uv éllel, mint M-mel, azaz ha M nem tartalmaz olyan élt sem, ami u számára és olyan élt sem, ami v számára jobb az uv élnél. Ha az M párosítás mellett nincs blokkoló él, akkor M-et* stabil párosításnak *nevezzük.*

A fenti definíció nem csak páros gráfokra értelmes. Könnyű megadni olyan G gráfot és a csúcsaihoz tartozó preferenciarendezéseket úgy, hogy ne létezzen stabil párosítás. Például ha egy 3-csúcsú körben a preferenciák olyanok, hogy minden csúcs az egyik szomszédjának a legjobb, a másiknak pedig a legrosszabb választása, akkor nincs stabil párosítás. A stabil párosítás létezésének eldöntéséhez ill. stabil párosítás kereséséhez rendkívül hasznos az alábbi Éltörlési Lemma.





5.2. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán minden $v \in V$ esetén. Tegyük fel, hogy az u csúcs legjobb éle $e = uv$, és $e \succ_v f = wv$, azaz v számára e jobb, mint f. Ekkor a G és a $G - f$ gráfoknak ugyanazok a stabil párosításai.*

Bizonyítás. Legyen M stabil párosítás G-ben. Ha $f \in M$, akkor $e \notin M$, és mivel e az u csúcs legjobb éle, ezért e blokkoló él M mellett. Ezért $f \notin M$, így M a $G - f$ gráfban is párosítás. Tekintettel arra, hogy M mellett nincs G-ben blokkoló él, M mellett $G - f$-ben sincs blokkoló él, ezért M stabil $G - f$-ben is.

Most azt tegyük fel, hogy M a $G - f$ gráf stabil párosítása. Természetesen ekkor M G-ben is párosítást alkot, amit az f élen kívül egyetlen él sem blokkolhat. Ha most indirekt feltesszük, hogy f blokkoló él M mellett, akkor $e \notin M$. Ekkor azonban e is blokkolja M-et, ami ellentmond az M párosítás $(G - f)$-beli stabilitásának. Ezzel igazoltuk, hogy M stabil G-ben. □

Az 5.2 Éltörlési Lemma komoly segítség a stabil párosítások keresésében: az alkalmazása révén ugyanis úgy tudunk élt törölni, hogy nem változik a stabil párosítások halmaza, így a feladatot egy egyszerűbb feladatra vezetjük vissza. Az alábbi eredmény példát mutat az Éltörlési Lemma egy lehetséges alkalmazására.

5.3. Megfigyelés. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és legyen $w : E \to \mathbb{R}$ egy olyan élsúlyozás, ahol nincs két egyforma súlyú él. A csúcsok $\preceq_v$ élpreferenciáit úgy definiáljuk, hogy tetszőleges v-re illeszkedő e, f élek esetén $f \prec_v e$ ha $w(e) < w(f)$. Ekkor G-nek pontosan egy stabil párosítása van.*

Bizonyítás. Az Éltörlési Lemma alkalmazásával egymás után törlünk éleket az eredeti G gráfból. Amikor ennek során egy G' gráffal dolgozunk, és e a G' egy komponensének legkönnyebb éle, akkor az Éltörlési Lemma szerint minden e-hez csatlakozó él törölhető. Így egy olyan komponens keletkezik, ami csak az e élt tartalmazza. Miután már több éltörlés nem végezhető, az eljárás végén kapott G^* gráfban minden komponensének legfeljebb egy éle lesz, azaz $M = E(G^*)$ egy párosítás. Világos, hogy G^*-nek egyetlen stabil párosítása van, mégpedig M. Az Éltörlési Lemma miatt tehát G-nek is M az egyetlen stabil párosítása. $\square$

Térjünk vissza most a bevezetésben említett házassági modellhez, amikoris a szóban forgó G gráf páros. Az derül ki, hogy ebben az esetben tetszőleges preferenciák esetén van stabil párosítás. Sőt: Gale és Shapley alábbi lánykérő algoritmusa ilyet talál.

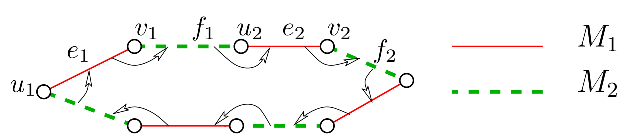
1. Minden fiú megkéri a számára legszimpatikusabb lány kezét.
2. Minden lány a legjobb kivételével kikosarazza az összes kérőjét.
3. Ha nem volt kikosarazás, akkor STOP: a lánykérésekhez tartozó párosítás az output.
4. Ha volt kikosarazás akkor GoTo 1

A lánykérő algoritmus helyességének igazolásához azt érdemes megfigyelni, hogy minden kikosarazás egy olyan éltörlésnek felel meg, ami az 5.2 Éltörlési Lemmában szereplő éltörlés speciális esete. Itt ugyanis az f él a w csúcs legjobb éle, míg az Éltörlési Lemmában ezt nem várjuk el. A lánykérő algoritmus során tehát egyetlen kikosarazás miatti éltörlés sem változtat a stabil párosítások halmazán. Abban az előbb-utóbb elérkező pillanatban, amikor a fiúk csupa különböző lány kezét kérik meg, a lánykérések egy M stabil párosítást alkotnak abban a G' gráfban, ami a korábbi éltörlések után megmaradt. Ha ugyanis egy $f\ell$ él nem szerepel M-ben, akkor M tartalmazza az f számára legjobb G'-beli élt, így $f\ell$ nem blokkolhat. Abból, hogy az Éltörlési Lemma szerint G és G' stabil párosításai megegyeznek, nem csupán a lánykérő algoritmus helyessége adódik, hanem az alábbi eredmény is.

5.4. Megfigyelés. *A lánykérő algoritmus outputja olyan stabil párosítás, amiben minden fiú a legjobb olyan párt kapja, aki stabil párosításban a számára elérhető. Egyúttal minden lány a lehető legrosszabb olyan partnert kapja, aki számára stabil párosításban elérhető.*

Az 5.4 Megfigyelésben leírt tulajdonság miatt a lánykérő algoritmus által megtalált stabil párosítást szokás *fiú-optimális* stabil párosításnak nevezni. Természetesen ha a lánykérő algoritmust a nemek szerepcseréjével futtatjuk, akkor a lány-optimális stabil párosítást találjuk meg, amiben minden lány a számára elérhető legjobb stabil házastársat kapja. Könnyű olyan példát találni, ahol a fiú-optimális és lány-optimális stabil párosítások különbözők. Sőt, olyan élpreferenciákkal ellátott páros gráfot sem nehéz mutatni, amelyikben a stabil párosítások száma a gráf csúcsszámának exponenciális függvénye. A stabil párosítások struktúrájáról szól a következő tétel.

5.5. Tétel. *Ha M_1 és M_2 az élpreferenciákkal ellátott (nem feltétlenül páros) G gráf két stabil párosítása, akkor $V(M_1) = V(M_2)$, azaz a G gráf bármelyik stabil párosítását is választjuk, mindig ugyanazok a csúcsok lesznek kipárosítva, és ugyanazok a csúcsok maradnak fedetlenül.*



Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy az M_1 és M_2 párosítások $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_1) \cup (M_2 \setminus M_1)$ szimmetrikus különbsége olyan alternáló körökből áll, amelyek mentén úgy tudunk végighaladni, hogy mindig egyre jobb élre lépünk. Ebből már következik a feladat állítása, hiszen egyrészt a két stabil párosítás közös élei (azaz $M_1 \cap M_2$) által fedett csúcsokat mindkét párosítás fedi, másrészt pedig az előbb leírt preferenciakörökhöz tartozó M_1-beli és M_2-beli élek is ugyanazokat a csúcsokat fedik.

Legyen tehát $e_1 \in M_1 \setminus M_2$. Mivel $e_1 \notin M_2$, ezért e_1 nem blokkolja M_2-t. Kell lennie tehát $M_2 \setminus M_1$-ben egy olyan f_1 élnek, aminek van e_1-gyel egy közös v_1 csúcsa, és amire $e_1 \prec_{v_1} e_1$ teljesül. Hasonló gondolatmenetet követve abból, hogy $f_1 \notin M_1$ és f_1 nem blokkolja M_1-et, következik, hogy van egy olyan $e_2 \in M_1 \setminus M_2$ él, ami dominálja f_1-et, azaz $f_1 \prec_{u_2} e_2$.

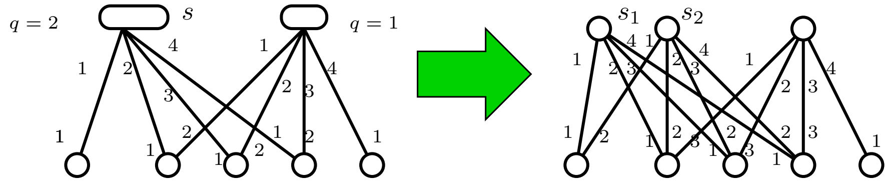
Ezt a sort folytatva kapjuk az $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots$ éleket, ahol $e_i = u_i v_i$ és $f_i = v_i u_{i+1}$, továbbá $e_i \prec_{v_i} f_i$ ill. $f_i \prec_{u_{i+1}} e_{i+1}$ teljesül. Mivel a G gráf véges, előbb-utóbb ismétlődés lesz ebben a sorozatban. Ez az ismétlődés csak egyféleképp történhet, mégpedig úgy, hogy $e_{k+1} = e_1$ valamely k-ra, és innentől ciklikusan folytatódik minden, azaz $f_1 = f_{k+1}$, $e_2 = e_{k+2}$ sít. Ezzel igazoltuk a fent megfogalmazott állítást, miszerint az $M_1 \triangle M_2$ szimmetrikus különbség prefrerenciakörökből áll. $\square$

5.1. Az egyetemi felvételi probléma

A stabil házasság probléma egy fontos általánosításában a szereplők az egyetemi szakok és a szakokra jelentkező tanulók, akik rendre az S ill. T halmazokat alkotják. A $G = (S \cup T, E)$ páros gráf színosztályai az S ill. T halmazok, az élek pedig a jelentkezések: a ts él azt jelenti, hogy a t jelentkező jelentkezik az s szakra. Akárcsak a stabil párosítások esetén, minden résztvevő esetén adott egy preferenciarendezés az adott résztvevőhöz kapcsolódó éleken, a t jelentkező ill. s szak esetén ezeket rendre $\preceq_t$ ill. $\preceq_s$ jelöli. Mindezen túl minden $s \in S$ szakhoz tartozik egy q_s keretszám, az s szakra felvehető hallgatók maximális létszáma.

Felvételi séma alatt egy olyan $F \subseteq E$ élhalmazt értünk, amelyikre igaz, hogy minden $t \in T$ jelentkező legfeljebb 1, minden s szak pedig legfejebb q_s F-beli élnek csúcsa. Egy felvételi séma tehát jelentkezések egy olyan halmaza, ami megvalósítható: egyetlen jelentkezőnek sem tartalmazza egynél több jelentkezését és egyetlen szak hallgatói létszáma sem haladja meg az adott szak keretszámát. Egy F felvételi séma akkor *stabil*, ha egyetlen él sem blokkolja. Itt *blokkoló élen* olyan $e = ts$ élt értünk, amivel mindkét végpontja jobban járna, mint a séma szerinti élekkel: egyrészt tehát nincs olyan $f \in F$ él amire $e \prec_t f$, másrészt pedig nincsenek olyan $f_1, \ldots, f_{q_s} \in F$ élek sem, amelyekre $e \prec_s f_i$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, q_s$ esetén. Egy ts él akkor nem blokkol, ha a t jelentkezőt felvették az s szaknál preferáltabb szakra vagy ha az s szak a teljes keretszámát egytől egyig t-nél jobb jelentkezőkkel töltötte fel.

Az egyetemi felvételi probléma esetén a feladat egy stabil felvételi sémát keresése a fent leírt modellben. Világos, hogy ha minden létszámkorlát pontosan 1, akkor az egyetemi felvételi probléma egy páros gráf stabil párosításának keresésével ekvivalens. Megmutatjuk, hogy az egyetemi felvételi probléma 1-nél nagyobb keretszámok esetén is visszavezethető páros gráf stabil párosításának keresésére.



A fenti egyetemi felvételi probléma esetén miden s egyetemi szak helyett vegyünk s-ből q_s példányt: $S' = \{s^i : s \in S, 1 \leq i \leq q_s\}$ és definiáljuk a $G' = (S' \cup T, E')$ páros gráfot az $E' = \{ts^i : ts \in E, 1 \leq i \leq q_s\}$ élhalmazon. A G' gráfot tehát úgy kapjuk, hogy minden s szakot q_s példányban klónozunk. A G' gráf $s^i \in S'$ csúcsához tartozó preferencia az s szak preferenciájából öröklődik, azaz $s^i t \prec'_{s^i} s^i t' \iff st \prec_s st'$. Az t jelentkező G'-höz tartozó preferenciája pedig szintén a felvételi problémabeli $\preceq_t$-ből származik azzal a kiegészítéssel, hogy ugyanazon szak klónjai közül a kisebb indexű mindig jobb a nagyobb indexűnél. Formulával megadva ez azt jelenti, hogy $ts^i \prec'_t tz^j$ ha $s \neq z$ és $ts \prec_t tz$ vagy ha $s = z$ és $i > j$. Végül az $F' \subseteq E'$ élhalmaz $P(F')$ *vetülete* a F-beli éleknek megfelelő E-beli élek halmaza, azaz $P(F') = \{ts \in E : \exists 1 \leq i \leq q_s \text{ amire } ts^i \in F'\}$. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ha egy s szak kereteszáma q_s, akkor az s szakot helyettesítjük q_s db ,,hellyel". Minden jelentkező egy szak egy helyére szeretne bejutni, de minden helyhez külön jelentkezés tartozik. Az s szakhoz tartozó helyek preferenciája megegyezik az s szakéval, a jelentkezők preferenciája pedig első sorban a szak, másodsorban pedig a szakon belüli hely sorszáma alapján dől el. Az alábbi eredmény mutat a két modell között egy fontos kapcsolatot.

5.6. Tétel. *A $G = (S \cup T, E)$ gráf, $\{q_s : s \in S\}$ keretszámok és $\{\preceq_t : t \in T\}$ ill. $\{\preceq_s : s \in S\}$ preferenciák által definiált egyetemi felvételi problémában F pontosan akkor stabil felvételi séma, ha a G' gráfnak van olyan F' stabil párosítása, amire $F = P(F')$ teljesül.*

A Tétel szerint tehát a stabil felvételi sémák lényegében azonosak G' stabil párosításaival.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F' a G' egy stabil párosítása. Ekkor $F = P(F')$ felvételi séma, hiszen bármely jelentkezőre legfeljebb egy él illeszkedik, és bármely s szak pedig legfeljebb annyi F-beli élnek végpontja, ahány klónja szerepel s-nek G'-ben. Ha $ts \notin F$, akkor a vetítés folytán $ts^1, ts^2, \ldots \notin F'$. Mivel F' stabil párosítás, ezért a ts^i élek egyike sem blokkolja F'-t. Ezért vagy van egy $tz^j \in F'$ él, amire $ts^i \prec'_t tz^j$ (amikoris $tz \in F$, $ts \prec_t tz$, tehát ts nem blokkol F-ben) vagy pedig van egy $t_i s^i \in F'$ él, amire $ts^i \prec'_{s^i} t_i s^i$. Ha minden s^i-re az utóbbi lehetőség áll fenn, akkor $t_1 s, t_2 s, \ldots, t_{q_s} s \in F$ és $ts \prec_s t_i s$, azaz az F felvételi sémában s-re q_s olyan él illeszkedik, amelyek mindegyike jobb ts-nél. Azt kaptuk, hogy egyetlen ts és sem blokkolhatja az F felvételi sémát, ami ilyenformán bizonyosan stabil.

Tegyük fel most, hogy F egy stabil felvételi séma. Definiáljuk az F' párosítást G'-ben úgy, hogy $ts^i \in F' \iff ts$ az s-re illeszkedő F-beli élek közül az s számára i-edik legjobb. E definíció következménye, hogy $P(F') = F$. Azt kell igazolnunk, hogy F' a G' stabil párosítása, azaz F'-t egyetlen ts_i él sem blokkolja.

Legyen tehát $ts^i \in E \setminus F'$ tetszőleges él. Tegyük fel először, hogy $ts \in F$, és ts a j-edik legjobb él F'-ben az s-re illeszkedő élek között. Ha $j \leq i$, akkor $ts^j \in F$ és $ts^i \prec'_t ts^j$ a $\prec'_t$ definíciója alapján, így ts^i nem blokkolja F'-t. Ha azonban $j > i$, akkor ts az s-ből induló i-edik legjobb éle F'-nek. Legyen $t's$ az F' i-edik legjobb s-re illeszkedő éle. Ekkor $ts \prec_s t's$ és F definíciója szerint $t's^i \in F$ ill. $ts^i \prec'_{s_i} t's^i$, így ts^i ebben az esetben sem blokkolja F'-t. Ha pedig $ts \notin F'$, akkor vagy van egy $ts' \in F'$ él, amire $ts \prec_t ts'$, vagy pedig F' tartamaz $t_1 s, t_2, \ldots, t_{q_s} s$ éleket, amelyek mindegyikére $t_1 s \succ_s t_2 s \succ_s \ldots \succ_s t_{q_s} s \succ_s ts$ teljesül. Az első esetben $ts'^k \in F$ valamely k-ra, és $ts^i \prec'_t ts'^k$, és ts^i ezért nem blokkolja F-et. A második esetben pedig $ts^i \succ'_{s_i} t_i s^i \in F'$ minden $1 \leq i \leq q_s$-re, és ts^i ismét nem blokkol. Ezzel a Lemmát igazoltuk. $\square$

5.7. Következmény. *A $G = (S \cup T, E)$ gráf, $\{q_s : s \in S\}$ keretszámok és $\{\preceq_t : t \in T\}$ ill. $\{\preceq_s : s \in S\}$ preferenciák által definiált egyetemi felvételi problémában mindig van stabil felvételi séma. A felvételi sémák között van egy egyetem-optimális, amelyikben mindegyik szak a lehető legjobb jelentkezőket veszi fel, amit egy stabil felvételi séma során felvehet, és van egy jelentkező-optimális, amelyikben minden jelentkező a legjobb olyan szakra nyer felvételt, amire* *egy stabil felvételi sémában felvehető. Igaz továbbá, hogy bármely két stabil felvételi sémában ugyanazok a jelentkezők nyernek felvételt, és minden szak ugyanannyi jelentkezőt vesz fel a két séma szerint. Ráadásul ha egy s szak egy stabil felvételi sémában a q_s-nél kevesebb jelentkezőt vesz fel, akkor s bármely stabil felvételi sémában ugyanazokat a jelentkezőket veszi fel.*

Bizonyítás. Az utolsó állítás kivételével minden közvetlenül adódik a az 5.5 és az 5.6 Tételekből. Az utolsó állítás bizonyítása két stabil felvételi séma szimmetrikus különbségének vizságlatával igazolható, a részleteket az olvasóra bízzuk. □

5.2. A vonalhúzási probléma

Az előző részben tárgyalt egyetemi felvételi modell lényeges leegyszerűsítést tartalmaz a valósághoz képest. Magyarországon ugyanis az egyetemi szakok preferenciáját a jelentkezőkön nem egy lineáris rendezés, hanem egy pontszámokon alapuló rangsor határozza meg. Ezért bármely szak jelentkezői között előfordulhat pontszámegyenlőség. A jogi környezet azonban nem engedi meg, hogy ugyanarra a szakra azonos felvételi pontszámmal rendelkező jelentkezők különböző elbírálásban részesüljenek. Ezért nem egy felvételi séma explicit meghatározásával, hanem implicit módon, egy ponthatár megállapítása révén dől el, hogy az egyes jelentkezők melyik szakra nyernek felvételt.

A továbbiakban vizsgált finomabb modell tehát egy $G = (S \cup T, E)$ gráfon alapul, ahol továbbra is S a szakok, T a jelentkezők, E pedig a jelentkezések halmaza. Itt minden $t \in T$ jelentkező preferenciáit egy, a t-re illeszkedő éleken adott $\preceq_t$ lineáris rendezés írja le, továbbá minden $ts \in E$ jelentkezéshez tartozik a t jelentkező által az s szakon elért $r_{st} \in \mathbb{N}$ felvételi pontszám. *Ponthatár* alatt egy $\ell : S \to \mathbb{N}$ függvényt értünk. Rögzített ℓ ponthatár mellett egy $ts \in E$ jelentkezés akkor *eredményes*, ha $r_{st} \geq \ell(s)$, és akkor *sikeres*, ha ts a t jelentkező legjobb eredményes jelentkezése. Az ℓ ponthatárhoz tartozó sikeres jelentkezések halmazát $F[\ell]$ jelöli. Az ℓ ponthatár *megengedett*, ha $F[\ell]$ felvételi séma, azaz ha minden s szakra igaz, hogy az s-et érintő sikeres jelentkezések száma legfeljebb q_s. Az ℓ ponthatár *stabil*, ha ℓ egyrészt megengedett, másrészt pedig minden olyan s szakra, amelyre $\ell(s) > 0$, az teljesül, hogy ha $\ell(s)$-t 1-gyel csökkenénk, akkor az így kapott ℓ' ponthatár már nem lenne megengedett, mert s-hez q_s-nél több sikeres jelentkezés érkezne.

Vonalhúzási feladat alatt egy stabil ponthatár meghatározását értjük a fent ismertetett modellben. A vonalhúzási feladat megoldásához érdemes átfogalmazni a stabil ponthatár definícióját. Ennek érdekében bevezetünk egy operátort a ponthatárokon. Legyen ℓ egy tetszőleges ponthatár és minden s szakra definiáljuk a

$$\varphi(\ell)(s) = \min\{p : |F[(\ell_{-s}, p)](s)| \leq q_s\}$$

pontszámot, ahol (ℓ_{-s}, p) azt a ponthatárt jelöli, amit úgy kapunk az ℓ ponthatárból, hogy az s szakhoz tartozó bejutási pontszámot p-re módosítjuk. A $\varphi(\ell)$ ponthatár tehát úgy származik ℓ-ből, hogy minden s szak a lehető legalacsonyabbra állítja a saját bejutási pontszámát ami mellett az s-hez sikeres jelentkezések száma még nem lépi túl a keretszámot abban az esetben, ha a többi szak ponthatára megmarad az ℓ szerinti szinten.

5.8. Megfigyelés. *Egy ℓ ponthatár pontosan akkor stabil, ha ℓ a φ operátor fixpontja, azaz ha $\varphi(\ell) = \ell$.*

Bizonyítás. Ha $\varphi(\ell) = \ell$, akkor ℓ megengedett, és a φ operátor definíciója miatt egyúttal stabil is. Ha ℓ stabil, akkor a stabilitás definíciójából adódik, hogy $\varphi(\ell) = \ell$. □

5.9. Megfigyelés. *A φ operátor monoton, azaz ha $\ell \leq \ell'$ akkor $\varphi(\ell) \leq \varphi(\ell')$.*

Bizonyítás. Legyen s tetszőleges szak, jelölje $p = \varphi(\ell)(s)$ az s-hez rendelt pontszámot, és tekintsük az $\ell^* = (\ell'_{-s}, p-1)$ ponthatárt. Ezen ℓ^* ponthatár mellett egyetlen olyan jelentkező sem tud egy számára s-nél jobb szakra bekerülni, akinek ez már az ℓ ponthatár mellett sem sikerült. Ezért az ℓ^* ponthatár esetén minden jelentkező, aki az $(\ell_{-s}, p-1)$ ponthatár mellet az s szakra került, ugyanúgy az s szakra kerül ℓ^* esetén is. A $\varphi(\ell)$ definíciója miatt az $(\ell_{-s}, p-1)$ ponthatár mellett az s szakra q_s-nél többen jutnak be, ami azt jelenti, hogy $\varphi(\ell')(s) \geq p = \varphi(\ell)(s)$. Innen pedig közvetlenül adódik a bizonyítandó $\varphi(\ell') \geq \varphi(\ell)$ reláció. □

Figyeljük meg, hogy a vonalhúzási problémában az értelmes ponthatárok száma véges, hiszen minden s szakon a bejutási pontszámnak 0 és $\max\{r_{st} : t \in T\}$ közé kell esnie. Tarski ismert fixponttétlének következménye, hogy ebben az esetben a φ operátornak van fixpontja, sőt, egy ilyen fixpont konstrukciója sem ördöngösség. Világos ugyanis, hogy $0 \leq \varphi(0)$ (ahol 0 a konstans 0 ponthatárt jelenti), ezért a φ operátor monotonitásából $\varphi(0) \leq \varphi(\varphi(0))$ következik. A monotonitás ismételt alkalmazásával adódik, hogy

$$0 \leq \varphi(0) \leq \varphi(\varphi(0)) \leq \ldots \leq \varphi^{(k)}(0) \leq \ldots ,$$

ahol $\varphi^{(k)}$ a φ k-szoros iteráltját jelöli. A lehetséges ponthatárok véges száma miatt lennie kell egy olyan k-nak, amire $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k+1)}(0)$, azaz $\underline{\ell} := \varphi^{(k)}(0)$ stabil ponthatár. A φ operátornak a 0 ponthatárból kiinduló fenti iterálását *ponthatárnövelő algoritmusnak* nevezzük, és mint láttuk, ez az algoritmus egy $\underline{\ell}$ stabil ponthatárt talál meg.

Tegyük fel, hogy $0 \leq \ell$ egy tetszőleges stabil ponthatár, azaz $\varphi(\ell) = \ell$. A φ operátor monotonitása miatt ekkor $\varphi(0) \leq \varphi(\ell) = \ell$, és az iterált leképezésre is hasonló igaz: $\underline{\ell} = \varphi^{(k)}(0) \leq \varphi^{(k)}(\ell) = \ell$. Ez azt jelenti, hogy a ponthatárnövelő algoritmus outputja a lehető legalacsonyabb stabil ponthatár, amit szokás *jelentkező-optimális* ponthatárnak is nevezni.

A stabil ponthatár konstrukcióját nem csak a 0 ponthatárról indíthatjuk, ahogy ezt a ponthatárnövelő algoritmus teszi. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $r_{st} \leq 500$ teljesül minden felvételi pontszámra. Ekkor $\varphi(500) \leq 500$ (itt 500 a konstans 500-as ponthatárt jelenti), ezért φ monotonitásából

$$500 \geq \varphi(500) \geq \ldots \geq \varphi^{(k)}(500) \geq \ldots$$

következik, és ismét csak bekövetkezik egy ismétlődés, mondjuk $\varphi^{(m)}(500) = \varphi^{(m+1)}(500)$. Ekkor $\overline{\ell} := \varphi^{(m)}(500)$ a φ operátor fixpontja, ezért stabil ponthatár, amiről a fentihez hasonló módon igazolható, hogy $\ell \leq \overline{\ell}$ teljesül tetszőleges ℓ stabil ponthatár esetén. Az $\overline{\ell}$ ponthatárt *egyetem-optimális* ponthatárnak hívjuk, és a fenti eljárást, amivel $\overline{\ell}$-et megkonstruáltuk, *ponthatárcsökkentő algoritmusnak* nevezzük.

A fenti gondolatmenettel igazolt megfigyeléseket fogalalja össze az alábbi eredmény.

5.10. Tétel. *Tetszőleges vonalhúzási probléma esetén van stabil ponthatár. A ponthatárnövelő ill. a ponthatárcsökkentő algoritmusok $\underline{\ell}$ ill. $\overline{\ell}$ outputjai stabil ponthatárok, és tetszőleges ℓ stabil ponthatárra $\underline{\ell} \leq \ell \leq \overline{\ell}$ teljesül.*

Ha $\ell \leq \ell'$ stabil ponthatárok, akkor az ℓ ponthatár alkalmazása esetén legalább annyi jelentkezőt vesznek fel, mint az ℓ' ponthatár alkalmazásával. Következésképp a legtöbb jelentkező a jelentkező-optimális ponthatár alkalmazása esetén nyer felvételt.

Bizonyítás. Csupán a tétel második bekezdése szorul bizonyításra, az első részt még a tétel kimondása előtt igazoltuk. A második részhez pedig mindössze annyit kell megfigyelni, hogy egy jelentkező felvétele pusztán azon múlik, hogy van-e eredményes jelentkezése. Márpedig ha egy t jelentkezőnek az s szakra történő jelentkezése az ℓ' ponthatár esetén eredményes, akkor ugyanez a jelentkezés ℓ esetén is eredményes. Ezért aztán minden jelentkező, akit az ℓ' ponthatár mellett felvesznek valamelyik szakra, felvételt nyer valahova az ℓ ponthatár alkalmazása esetén is. □

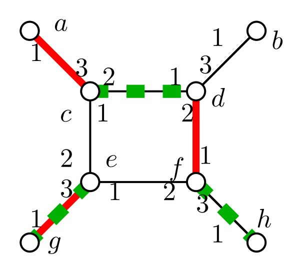
5.3. Népszerű párosítások

Ebben a részben két korábbi modellt kapcsolunk össze. Egy szavazási problémáról lesz szó, amiben a szavazók egy $G = (V, E)$ gráf csúcsaiban ülnek, és a közösségi döntés lehetséges alternatívái a G gráf párosításai. Ahogyan a stabil párosítások esetén láttuk, úgy itt is minden $v \in V$ csúcshoz tartozik egy $\preceq_v$ lineáris preferenciarendezés a v csúcsra illeszkedő élek $E(v)$ halmazán. Két alternatíva (mondjuk az M és N párosítás) közötti választáskor tehát minden v csúcs arra a párosításra szavaz, amelyiknek a v-t fedő éle megelőzi a másikat a $\preceq_v$ preferenciasorrendben. (Ha M és N között v szempontjából nincs különbség, akkor v tartózkodik, ha pedig (mondjuk) az M párosítás fedi, N pedig elkerüli v-t, akkor v M-re szavaz.)

A csúcsok ilyetén megszavaztatásával össze tudjuk hasonlítani G bármely két párosításának a népszerűségét. Azt mondjuk, hogy az M párosítás *népszerűbb* az N párosításnál (jelölésben $N \prec M$), ha az M és N közti választás esetén többen szavaznak M-re mint N-re. Egy M párosítást akkor mondunk *népszerű párosításnak*, ha G-ben nincs M-nél népszerűbb párosítás, azaz ha M gyenge értelemben vett Condorcet-győztes ebben a szavazási modellben.

Emlékezzünk vissza, hogy TVF-ek és TVSZ-ok kapcsán korábban már definiáltunk az alternatívák között egy ,,legyőzési" relációt. Ennek speciális esete a fent definiált népszerűségen alapuló összehasonlítás. Arra is láttunk már példát, hogy a szavazási modellben előfordulhat, hogy bizonyos alternatívák körbeverik egymást.

Nincs ez másképp a népszerűség esetében sem. Az ábrán látható G gráfon az $M_1 = \{ac, df, eg\}$ és az $M_2 = \{cd, eg, fh\}$ párosításokat érdemes megfigyelni. E két párosítás összehasonlításakor az e, g és b csúcsok tartózkodnak, a és f az M_1 párosításra, míg c, d és h M_2-re szavaznak, ezért $M_1 \prec M_2$. Ha definiáljuk az $M_3 = \{bd, ce, fh\}$ és $M_4 = \{ac, bd, ef\}$ párosításokat, akkor hasonló érvelés mutatja az $M_1 \succ M_4 \succ M_3 \succ M_2 \succ M_1$ körbeverést.



Természetes kérdés, hogy van-e mindig népszerű párosítás. Ha van, akkor mennyire nehéz ilyet találni? Erre a kérdésre ad részleges választ Gärdenfors alábbi megfigyelése, ami nem csak páros gráfokra igaz.

5.11. Tétel. *Gärdenfors megfigyelése: ha M stabil párosítás, akkor M népszerű.*

Minimalitási tulajdonság: ha M stabil párosítás és az N párosításra $|N| < |M|$ teljesül, akkor N nem népszerű.

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy egyetlen N párosítás sem népszerűbb M-nél, azaz M és N összehasonlításakor M-nek legalább annyi szavazója van, mint N-nek.

Legyen u az N egyik szavazója ebben az összehasonlításban. Ekkor az N-beli uv él nem éle M-nek. Tekintettel arra, hogy uv nem blokkolja M-et, a v csúcs bizonyosan M-re szavaz. Ezért N minden szavazójának N-beli párja M-et választja, így $N \prec M$, vagyis M népszerű, ami igazolja Gärdenfors megfigyelését.

A minimalitási tulajdonságot igazoljuk. Láttuk, hogy N minden szavazójának N-beli párja M-re szavaz. Mivel $|M| > |N|$, ezért van olyan csúcs, amit az M párosítás fed, N

viszont elkerül. Minden ilyen csúcs M-re szavaz, és ezekkel együtt M-nek szigorúan több szavazója van, mint N-nek. Ezért aztán $N \prec M$, vagyis N bizonyosan nem népszerű. Ezzel beláttuk, hogy a stabil párosítások a legkevesebb élt tartalmazó népszerű párosítások. □

Ha olyan modellben dolgozunk, ahol népszerű párosítás a társadalmi elvárás, akkor természetes igény lehet, hogy maximalizálhatjuk az összepárosított játékosok számát, más szóval a lehető legtöbb élt tartalmazó népszerű párosítást (vagy ezek egyikét) találjuk meg. Kavitha rendkívül szellemes algoritmusa ezt a feladatot oldja meg páros gráfok esetén. Az algoritmus inputja a fiúk F és a lányok L színosztályain egy $G = (F \cup L, E)$ páros gráf és minden $v \in F \cup L$ csúcshoz a v-re illeszkedő élek egy $\preceq_v$ preferenciasorrendje. Az algoritmus outputja G egy maximális méretű népszerű párosítása. Kavitha algoritmusa az alábbiak szerint működik.

A lánykérő algoritmust hajtjuk végre a G gráfon azzal a módosítással, hogy minden olyan f fiú, akit minden lány visszautasított, személyiségfejlesztő tréningen vesz részt. Ezt követően f elfelejti, hogy őt már visszautasították, és elölről kezdi a lánykérést a számára legszimpatikusabb lánnyal. A személyiségfejlesztő tréning hatására minden lány szimpatikusabbnak talál bármely tréningen átesett fiút bármely személyiségfejlesztetlen fiúnál. Ha azonban egy ℓ lánynak két tréninget elvégzett fiút kell összehasonlítania, akkor azt találja vonzóbbnak közülük, aki előbb van a $\preceq_\ell$ rangsorban. Ha az így módosított lánykérő algoritmusban egy f fiút a tréning elvégzése után is kikosaraz minden lány, akkor f beletörődik a sorsába, és pár nélkül marad. Kavitha algoritmusa akkor ér véget, amikor az eljárás egy fázisában nem történik visszautasítás. Ekkor az output a lánykérések által meghatározott M párosítás.

5.12. Tétel. *Tetszőleges $G = (F \cup L, E)$ páros gráfon és tetszőleges $\preceq_v$ preferenciarendezések esetén Kavitha algoritmusának outputja a G egy maximális méretű népszerű párosítása.*

Az 5.12 Tétel bizonyítása helyett egy erősebb eredményt fogunk igazolni. Ehhez először megértjük, hogy mi is történik valójában Kavitha algoritmusának végrehajtásakor. Definiáljuk a G^K gráfot a G gráf csúcshalmazán az alábbi módon. A G minden $e = f\ell$ éléhez két párhuzamos $f\ell$ él fog tartozni: egy piros e^p, és egy zöld e^z él. Azonos színű élek között a preferencia a G-beli preferenciából öröklődik. A lányok bármely piros élt előbbre rangsorolnak bármely zöld élnél, a fiúk számára viszont egy zöld él mindig jobb egy piros élnél. Formálisan: $G^K = (F \cup L, E^p \cup E^z)$, $E^p = \{e^p : e \in E\}$, $E^z = \{e^z : e \in E\}$. Ha az $f \in F$ csúcs G-beli preferenciasorrendje $e_1 \succ_f e_2 \succ_f \ldots \succ_f e_k$, akkor f G^K-beli preferenciasorrendje

$$e_1^z \succ_f^K e_2^z \succ_f^K \ldots \succ_f^K e_k^z \succ_f^K e_1^p \succ_f^K e_2^p \succ_f^K \ldots \succ_f^K e_k^p \,,$$

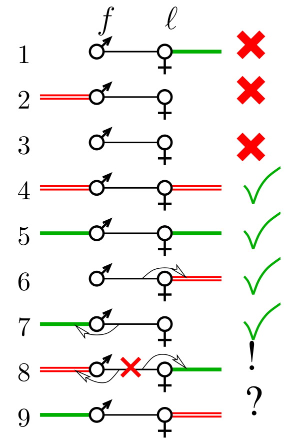
ha pedig egy $\ell \in L$ csúcs G-beli preferenciasorrendje $f_1 \succ_\ell f_2 \succ_\ell \ldots \succ_\ell f_m$, akkor ℓ G^K-beli preferenciasorrendje

$$f_1^p \succ_\ell^K f_2^p \succ_\ell^K \ldots \succ_\ell^K f_m^p \succ_\ell^K f_1^z \succ_\ell^K f_2^z \succ_\ell^K \ldots \succ_\ell^K f_m^z \,.$$

Figyeljük meg, hogy Kavitha algoritmusa nem más, mint a G^K gráfon a $\preceq_v^K$ preferenciák mellett végrehajtott lánykérő algoritmus, ami –mint láttuk– a G^K gráf fiú-optimális stabil párosítását találja meg. Az 5.12 Tétel tehát azonnal adódik az alábbi eredményből.

5.13. Tétel. *Ha M' a fent definiált G^K gráf stabil párosítása, akkor az M'-nek megfelelő G-beli élek $M = \{e \in E : \{e^p, e^z\} \cap M' \neq \emptyset\}$ halmaza G egy maximális méretű népszerű párosítása.*

Bizonyítás. Legyen N a G egy tetszőleges párosítása. Először M népszerűségét úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy N nem lehet M-nél népszerűbb. Ezután azt bizonyítjuk be, hogy ha $|N| > |M|$, akkor G tartalmaz N-nél népszerűbb párosítást. Innen már azonnal adódik, hogy M a G egy maximális méretű népszerű párosítása. Vizsgáljuk meg tehát G csúcsainak az M és N alternatívák összehasonlításakor leadott szavazatát.



Mivel M és N közös éleinek csúcsai az M és N által egyaránt fedetlen csúcsokhoz hasonlóan tartózkodnak a szavazástól, ezért csupán azon élek végpontjaira kell figyelnünk, amely élek a két párosítás közül pontosan az egyikhez tartoznak. Világos, hogy N minden szavazója egy ilyen N-beli él végpontja. Legyen $f\ell \in N$, és vizsgáljuk meg, hogy M hogyan fedi az f és ℓ csúcsokat. Mindkét csúcs esetén három lehetőség van: az adott csúcsot M piros vagy zöld éllel fedi vagy elkerüli. A mellékelt ábra a 9 lehetőséget mutatja. Három lehetőséget azonnal kizárhatunk: ha ℓ-et M zöld élen fedi f pedig fedetelen, akkor a piros $f\ell$ él blokkoló lenne, így M nem volna stabil G^K-ban. Hasonlóan, ha f-et M piros éllel fedi és ℓ fedetlen, akkor a zöld $f\ell$ él blokkolna. Ha pedig M az f és ℓ csúcsok egyikét sem fedi, akkor G^K a piros és zöld $f\ell$ élek bármelyike blokkol.

Négy olyan eset van, amikor az $f\ell$ él két végpontja közül legalább az egyik M-re szavaz. Ha M-ben f-et és ℓ-et ugyanolyan színű él fedi, akkor az ugyanilyen színű $f\ell$ él nem blokkolhat, így a két csúcs közül legalább az egyik M-re szavaz. Ha M piros élen fedi ℓ-et, és elkerüli f-et, akkor a piros $f\ell$ él nem blokkolhat, ezért ℓ M-re szavaz. Hasonlóan, ha M zöld élen fedi f-et, és elkerüli ℓ-et, akkor a zöld $f\ell$ él nem blokkolhat, tehát f is M-re szavaz.

Két eset maradt ki. Ha M f-et piros, ℓ-et pedig zöld éllel fedi, akkor a f M-re szavaz mivel a piros $f\ell$ él nem blokkol, és ℓ is M-re szavaz, mivel a zöld $f\ell$ él sem blokkol. Ha tehát az $f\ell$ élt elhagynánk N-ből, akkor az semmit sem változtatna az egyes csúcsok szavazatán. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy ez az eset nem valósul meg M és N viszonyában. Az utolsó eset az, ha M f-et zöld, ℓ-et pedig piros élen fedi. Kizárólag ebben az egyetlen esetben fordulhat elő az, hogy f és ℓ egyaránt N-re szavaznak.

Vizsgáljuk meg az $M \triangle N$ szimmetrikus különbség komponenseit. Minden ilyen komponens vagy egy MN-alternáló kör vagy egy MN-alternáló út. A 8. esetet kizáró feltevésünk miatt minden ilyen alternáló körben az M-hez tartozó élek egyszínűek, ezért a kör csúcsainak legalább a fele M-re szavaz. Ha egy alternáló út komponens nem tartalmaz az ábrán a 9. esetnek megfelelő N-beli élt, akkor a komponens minden N-beli élének legalább az egyik végpontja M-re szavaz, ezért a komponens csúcsainak ismét legalább a fele M-et választja. Végül ha az útkomponens egyik N-beli éle a 9. esetnek felel meg, akkor a kizárt 1. és 2. esetek miatt az útkomponens egyik végén piros, a másikon pedig zöld M-beli élre végződik. Az út két végpontja tehát M-re szavaz, és ez ellensúlyozza az N-re adott legfeljebb két szavazatot a 9. esetben szereplő N-beli él végpontjaiban. Azt kaptuk, hogy ez az utolsó fajta komponens is olyan, amelyikben a csúcsoknak legalább a fele M-re szavaz. Tehát a tetszőlegesen választott N párosítás nem lehet népszerűbb M-nél, ezért a korábbi állításunknak megfelelően M csakugyan népszerű.

A második cél eléréséhez engedjük meg a 8. eset előfordulását és tegyük fel, hogy $|N| > |M|$. Ekkor az $M \triangle N$ szimmetrikus különbségben kell lennie egy olyan P útkomponensnek, amelyik több N-beli élt tartalmaz, mint M-belit. Ekkor P mindkét végpontját elkerüli az M párosítás. Ez azt jelenti, hogy P egyik végpontjában a 6., a másikban pedig a 7. eset valósul meg, továbbá, hogy P-nek muszáj 1-gyel több olyan N-beli élt tartalmaznia, ami a 8. esethez tartozik mint olyat, amelyik a 9-edikhez. Ezért P csúcsai közül legalább 2-vel több az M-

szavazók száma az N-szavazókénál. Így az N és $N' = N \triangle P$ párosítások összehasonlításakor csak P csúcsai szavaznak, és közülük is legalább 2-vel többen N'-t választják. Ez azt jelenti, hogy N' népszerűbb N-nél, vagyis nem létezhet G-ben olyan népszerű párosítás, amelyik a G^K gráf egy stabil párosításánál több élt tartalmaz. $\square$