Wiederholungsaufgaben zur Vorbereitung für die Klausur

1. Seien A und B unabhängige Ereignisse, und sei C ein solches Ereignis, dass die Paare A und C bzw. B und C disjunkt sind. Nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$ gelten. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(\overline{\overline{A} \cap B} \cup C\right)$.

2. Ein Punkt P wird im Quadrat mit Ecken $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; -1)$ und $(-1; 1)$ gewählt. Sei A das Ereignis, dass P auf der Einheitskreisscheibe liegt, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt. Sei noch B das Ereignis, dass beide Koordinaten von P positiv sind. Entscheiden wir, ob die Ereignisse A und B unahängig sind.

3. Sei O der Ursprung auf der Koordinatenebene, und betrachten wir den Punkt P mit Koordinaten $(1; 0)$ und den Punkt Q mit Koordinaten $(0; 1)$. Ein Punkt A wird zufällig auf der Strecke OP gewählt, und unabhängig von A wird auch ein anderer Punkt B zufällig auf der Strecke OQ gewählt.

   (a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand zwischen A und B kleiner als 1 ist.

   (b) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit des obigen Ereignisses, falls der Punkt B (zufällig und unabhängig vom auf OP gewählten Punkt A) auf der L-förmigen Vereinigung der Strecken OP und OQ gewählt wird.

4. Ein Produkt hat Materialfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,15, Formfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,3, und Konstruktionsfehler mit Wahrscheinlichkeit 0,2. Diese Fehler sind paarweise unabhängig, aber nicht gemeinsam unabhängig: 0,02 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt alle Typen der Fehler hat. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt fehlerfrei ist?

5. 75% der Teilnehmer einer Prüfung studieren das Fach "A", 15% studieren das Fach "B", und 10% studieren das Fach "C". Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilnehmer eine Note 5 erhält, ist bei den Studierenden mit Fach "A" 0,4, beim Fach "B" 0,7, und beim Fach "C" 0,6. Angenommen, dass eine Person die Note 5 erhielt, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person das Fach
   a) "A", b) "B", c) "C" studiert?

6. Eine Urne enthält einen roten und einen blauen Ball. Wir ziehen einen Ball (zufällig) aus der Urne zweimal, und nach jedem Ziehen setzen wir den herausgezogenen Ball und noch einen Ball gleicher Farbe zurück. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich zwei rote und zwei blaue Bälle nach den zwei Ziehen in der Urne befinden?

7. Seien $X, Y \sim \mathrm{Bin}(n; \frac{1}{2})$ unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(XY = 0)$.

8. Wie viel Mal muss man einen Würfel werfen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Sechsen geworfen werden, nicht kleiner als 0,5 ist?

9. a) Wir wählen n Punkte im Einheitsquadrat $[0; 1] \times [0; 1]$. Sei X die Anzahl der Punkte, die auf der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$ liegen. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 3)$ und den Erwartungswert von X.

   b) Sei Y die Anzahl der Punkte, die auf der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ liegen. Berechnen wir $\mathbb{P}(Y \leq 3)$ und $\mathbb{E}(Y)$.

   c) Betrachten wir die in den Teilen a) und b) definierten Variablen X bzw. Y mit dem Parameter $n = 10$, und approximieren wir sie mit entsprechenden Poisson-verteilten Variablen U bzw. V. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(U \leq 3)$ und $\mathbb{P}(V \leq 3)$. Vergleichen wir diese Wahrscheinlichkeiten mit $\mathbb{P}(X \leq 3)$ bzw. $\mathbb{P}(Y \leq 3)$. Was erfahren wir? Was könnte der Grund des Phänomens sein?

10. In einer Stadt ist das Verhältnis der Tage ohne Unfälle 25%. Der Verkehr ist sehr groß, die Größenordnung der Anzahl der Autos ist an jedem Tag gleich. Die Autos verursachen Unfälle unabhängig voneinander mit kleiner Wahrscheinlichkeit. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es nächste Woche gerade 2 Tage mit mehr als 1 Unfälle gibt.

11. Es gibt 52 Blätter (ohne Joker) in einem Spielkartenpaket. Norbert vertauschte ein paar Blätter im Kartenpacket mit Joker. Wenn jemand Norbert anruft, dann zieht er zwei Blätter aus dem Paket. Falls beide Blätter Joker sind, dann beantwortet er den Anruf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (unabhängig von anderen Umständen). Falls eine andere Kombination von Blättern gezogen wird, dann beantwortet er den Anruf nicht. Diese Prozedur wird bei jedem Anruf durchgeführt, und Norbert mischt das Paket (zusammen mit den gezogenen Karten) nach jedem Anruf. Er ändert aber die Anzahl der Joker und die Anzahl der Blätter nicht. Wie viel Blätter vertauschte Norbert mit Joker, wenn wir wissen, dass man im Durchschnitt 34 mal bis zur ersten Antwort von Norbert telefonieren muss?

12. Eine reguläre Münze wird bis zum zweiten Kopf geworfen. Was ist der Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der Würfe? Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzalh der Würfe bis zum ersten Kopf und die Anzahl der Würfe nach dem ersten Kopf gleich sind?

13. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle enthalten, aber die zwei Werte p und q sind nicht bestimmt. Berechnen wir die Varianzen $\mathbb{D}^2(X)$, $\mathbb{D}^2(Y)$ und $\mathbb{D}^2(X+Y)$, wenn wir wissen auch, dass $\mathbb{P}(XY \geq 0) = 19/24$ gilt.

Y \ X	0	1	2
-1	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{12}$
1	q	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$

14. In ein am Anfang leeres Array der Größe $2n$ fügen wir die erten $2n$ positiven Zahlen zufällig ein (verschiedene Zahlen werden an verschiedene Stellen eingefügt).

    a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Zahlen 1 und 2 an benachbarte Stellen eingefügt?

    Wie viele solche Paare von benachbarten Stellen erwarten wir (im Durchschnitt), die *b) zwei gerade Zahlen *c) eine gerade und eine ungerade Zahl enthalten?

15. Betrachten wir die Funktion f, die durch die Formel

$$f(t) = \begin{cases} \alpha \cdot t^4 & \text{falls } t \in (2,3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben ist, wo $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl ist. Wie muss der Parameter α gewählt werden, damit man eine Dichtefunktion einer Zufallsvariablen erhält? Bestimmen wir in diesem Fall die Verteilungsfunktion einer zugehörigen Zufallsvariablen X. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 12)$, den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{D}^2(X)$.

16. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \beta \leq t \leq \beta + 5, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind. Nehmen wir an, dass $\mathbb{E}(X) = F_X\left(\frac{1}{2}\right)$ gilt, wo F_X die Verteilungsfunktion von X ist. Bestimmen wir die Werte von α und β.

17. Sei Y eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion folgenderweise angegeben ist:

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{(1+t)^2} & \text{falls } 1 < t < 9, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(0 < \sqrt{Y} < 2)$ und den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y^2)$.

18. Wir schalten zehn Geräte gleichzeitig ein. Die Dauer des fehlerlosen Betriebs (in Stunden) ist bei jedem Gerät exponetialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{9}$, und die Betriebszeiten der Geräte sind unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens vier Geräte 10 Stunden lang fehlerfrei funktionieren?

19. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $t \mapsto e^{-e^{-t}}$ ($e \approx 2{,}71...$), und sei noch $Y = e^{-X}$. Bestimmen wir die Dichtefunktion und die Standardabweichung von Y.