Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

6. Woche

Dávid Tóth (BME SZIT)

7., 10. Oktober 2024

Erwartungswert im Allgemeinen

Erwartungswert im Allgemeinen

Der Erwartungswert kann für eine beliebige Zufallsvariable definiert werden. Zunächst definieren wir ihn für *nichtnegative* Variablen:

Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable, dann ist der Erwartungswert durch

$$\mathbb{E}(X) = \sup_{Z \text{ einfach}, Z \leq X} \mathbb{E}(Z)$$

definiert. Dieser Wert ist eine nichtnegative Zahl oder Unendlich.

Erwartungswert im Allgemeinen

Sei X eine beliebige Zufallsvariable, dann ist

$$X^+ = \max\{X, 0\}$$

der Positivteil von X und

$$X^- = \max\{-X, 0\}$$

der Negativteil von X.

Man kann beweisen, dass diese Funktionen nichtnegative Zufallsvariablen sind. Folglich sind $\mathbb{E}(X^+)$ und $\mathbb{E}(X^-)$ definiert.

Erwartungswert im Allgemeinen

Nehmen wir an, dass $\mathbb{E}(X^+) < \infty$ oder $\mathbb{E}(X^-) < \infty$ gilt, dann ist der Erwartungswert von X durch

$$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

definiert.

- Dieser Wert ist endlich, falls $\mathbb{E}(X^+)$ und $\mathbb{E}(X^-)$ beide endlich sind.
- Falls $\mathbb{E}(X^+) = \infty$ und $\mathbb{E}(X^-) < \infty$, dann ist $\mathbb{E}(X) = \infty$.
- Falls $\mathbb{E}(X^+) < \infty$ und $\mathbb{E}(X^-) = \infty$, dann ist $\mathbb{E}(X) = -\infty$.
- Falls $\mathbb{E}(X^+) = \mathbb{E}(X^-) = \infty$, dann ist $\mathbb{E}(X)$ nicht definiert.

Erwartungswert im Allgemeinen

Bemerkungen.

Wenn X diskret oder stetig ist, dann geben die neue und die alte Definition denselben Begriff.

Seien X und Y Zufallsvariablen, für die $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ endlich sind. Dann ist auch $\mathbb{E}(X+Y)$ endlich und

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

gilt. Weiter, für jede $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X).$$

Varianz im Allgemeinen

- Da der Erwartungswert im Allgemeinen definiert wurde, so kann man auch die Varianz für eine beliebige Variable X definieren, falls $\mathbb{E}(X)$ endlich ist.
- Die im diskreten Fall benutze definierende Formel der Varianz bleibt unverändert, und viele der vorherigen Eigenschaften (zusammen mit ihren Beweisen) bleiben auch im Allgemeinfall gültig.

Varianz im Allgemeinen

Definition. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) < \infty$. Falls der Erwartungswert

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

endlich ist, dann heißt er die *Varianz* (szórásnégyzet, variancia) der Zufallsvariablen X. Sie ist mit $\mathbb{D}^2(X)$ bezeichnet.

Die positive Quadratwurzel der Varianz heißt die *Standardabweichung* (szórás). Sie ist mit $\mathbb{D}(X)$ bezeichnet.

Varianz im Allgemeinen

Behauptung. Sei X eine Zufallsvariable, für die $\mathbb{D}^2(X)$ endlich ist. Dann sind auch $\mathbb{D}^2(X+c)$ und $\mathbb{D}^2(cX)$ für jede $c \in \mathbb{R}$ endlich, und

$$\mathbb{D}(X+c) = \mathbb{D}(X) \qquad (\mathbb{D}^2(X+c) = \mathbb{D}^2(X))$$

und

$$\mathbb{D}(cX) = |c|\,\mathbb{D}(X) \qquad (\mathbb{D}^2(cX) = c^2\mathbb{D}^2(X))$$

gelten.

Behauptung. Sei X eine Zufallsvariable. Dann ist $\mathbb{D}^2(X)$ dann und nur dann endlich, falls $\mathbb{E}(X^2)$ endlich ist. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Transformationsformel für den Erwartungswert

Um die Varianz anhand der obigen Formel für stetige Variablen zu berechnen, sollen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(X^2)$ bestimmen.

Satz. (Transformationsformel) Sei X eine Zufallsvariable und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Falls X diskret (mit Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X) ist, dann ist auch $g(X)$ eine Zufallsvariable, und wenn $\mathbb{E}(g(X))$ definiert ist, dann gilt

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \operatorname{ran} X} g(k) f_X(k).$$

b) Falls X stetig mit Dichtefunktion f_X ist, und falls auch $g(X)$ eine Zufallsvariable ist, für die $\mathbb{E}(g(X))$ definiert ist, dann gilt

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_X(y)\, dy.$$

Transformationsformel für den Erwartungswert

Im Spezialfall $g(t) = t^2$:

- falls X diskret ist, dann gilt

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k \in \operatorname{ran} X} g(k) f_X(k) = \sum_{k \in \operatorname{ran} X} k^2 f_X(k),$$

- falls X stetig ist, dann gilt

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_X(y)\, dy.$$

Transformationsformel für den Erwartungswert

Beispiel. Sei $X \sim U(a; b)$, dann gibt die Transformationsformel den Erwartungswert $\mathbb{E}(X^2)$ folgenderweise:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_X(y)\, dy = \int_a^b \frac{y^2}{b-a}\, dy = \left[\frac{y^3}{3(b-a)}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Folglich gilt

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Transformationsformel für den Erwartungswert

Beispiel. Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dann gilt

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_X(y)\, dy = \int_0^{\infty} \lambda y^2 e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \left[-y^2 e^{-\lambda y}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2y e^{-\lambda y}\, dy = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Folglich gilt

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Transformierte Zufallsvariablen

- Es ist oft notwendig, auch die Verteilung einer transformierten Variablen zu bestimmen.
- Unsere wichtigsten Beispiele sind die lineare Transformation $aX + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) und die Transformation X^2.
- In anderen Situationen wird eine Variable X angegeben, und wir suchen eine Transformation $g(X)$, die eine bestimmte (vorgeschriebene) Verteilung hat.

Transformierte Zufallsvariablen

Beispiel.

Sei $X \sim U(-1; 1)$. Was ist die Verteilung von $Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$?

Wir bestimmen die Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \leq t\right)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq 2t - 1) = F_X(2t - 1).$$

Transformierte Zufallsvariablen

$$F_Y(t) = F_X(2t-1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 2t-1 < -1, \\ \frac{(2t-1)+1}{2}, & \text{falls } -1 \leq 2t-1 < 1, \\ 1, & \text{falls } 1 \leq 2t-1, \end{cases}$$

also

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ t, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } 1 \leq t. \end{cases}$$

Dann ist $Y \sim U(0;1)$.

Es gilt im Allgemeinen, dass $aX + b$ für eine uniformverteilte Variable X und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ uniformverteilt ist.

Transformierte Zufallsvariablen

Beispiel.

Seien $X \sim U(-1;1)$ und $Z = X^2$.

Die Verteilungsfunktion von Z: falls $t \geq 0$ gilt, dann

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{t}) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Sonst ist $F_Z(t)$ Null.

Transformierte Zufallsvariablen

Also gilt

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \frac{\sqrt{t}+1}{2} - \frac{-\sqrt{t}+1}{2}, & \text{falls } 0 \leq \sqrt{t} < 1, \\ 1 - 0, & \text{falls } 1 \leq \sqrt{t}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } 1 \leq t. \end{cases}$$

Transformierte Zufallsvariablen

Betrachten wir das folgende Problem:

Es gibt eine Zufallsvariable $X \sim U(0;1)$, die z.B. durch ein Computerprogramm (bzw. eine Methode) realisiert werden kann, das eine Zahl zwischen 0 und 1 uniformverteilt erzeugt.

Wir möchten die Variable X transformieren, um eine vorher angegebene Verteilung zu erhalten. D.h.: unser Ziel ist, zufällige Zahlen nach einer angegebenen Verteilung zu erzeugen.

Transformierte Zufallsvariablen

Eine Verteilung kann durch die zugehörige Verteilungsfunktion $F(t)$ beschrieben werden.

Also: wir suchen eine Funktion $g : (0; 1) \to \mathbb{R}$, für die die Verteilungsfunktion der Variablen $g(X)$ eine vorher angegebene Funktion $F(t)$ ist, d.h.

$$F(t) = \mathbb{P}(g(X) \leq t)$$

gilt.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass g^{-1} existiert. Falls g noch dazu monoton steigend ist, dann erhalten wir

$$F(t) = \mathbb{P}(g(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t)) = g^{-1}(t)$$

für alle $t \in \operatorname{ran} g$, also muss $g^{-1}(t) = F(t)$ für alle solche t gelten.

Transformierte Zufallsvariablen

Um mit der Gleichung $g = F^{-1}$ zu schließen, man muss mit den Definitions- und Wertemengen vorsichtig umgehen:

Satz. Sei $X \sim U(0;1)$ mit $\operatorname{ran} X = (0;1)$. Sei noch $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ eine monoton steigende Funktion mit

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0 \text{ und } \lim_{t \to \infty} F(t) = 1.$$

Nehmen wir an, dass die Einschränkung

$$F\,|_{(a;b)} : (a;b) \to (0;1)$$

von F aufs Intervall $(a;b)$ (wo beide von $a = -\infty$ und $b = \infty$ möglich sind) eine Bijektion mit Wertemenge $(0;1)$ ist.

Dann ist die Funktion $F^{-1} \circ X$ auch eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

Transformierte Zufallsvariablen

Beweis. 1. Schritt: die Funktion $F^{-1} : (0;1) \to (a;b)$ ist monoton steigend.

- Seien $x, y \in (0;1)$, $x < y$.
- Die Funktion $F\mid_{(a;b)}$ ist eine Bijektion, also gibt es zwei eindeutig bestimmte verschiedene Zahlen $u, v \in (a;b)$ mit $F(u) = x$ und $F(v) = y$.
- Da F monoton steigend ist und $x < y$ auch gilt, muss $F^{-1}(x) = u < v = F^{-1}(y)$ gelten.

Transformierte Zufallsvariablen

Beweis. 2. Schritt: die Funktion $F^{-1} \circ X : \Omega \to (a; b)$ ist eine Zufallsvariable.

- Wir müssen zeigen, dass $\{F^{-1} \circ X \leq t\}$ ein Ereignis ist.
- Falls $t \geq b$, dann ist $F^{-1}(X(\omega)) < b \leq t$ für alle $\omega \in \Omega$, also gilt $\{F^{-1} \circ X \leq t\} = \Omega$ in diesem Fall.
- Falls $t \leq a$, dann ist $F^{-1}(X(\omega)) > a \geq t$ für alle $\omega \in \Omega$, d.h. $\{F^{-1} \circ X \leq t\} = \emptyset$.
- Sei $t \in (a; b)$, da F und F^{-1} monoton steigend sind, folgen die Implikationen

$$F^{-1}(X(\omega)) \leq t \Longrightarrow F(F^{-1}(X(\omega))) = X(\omega) \leq F(t)$$

und

$$X(\omega) \leq F(t) \Longrightarrow F^{-1}(X(\omega)) \leq F^{-1}(F(t)) = t,$$

also $\{F^{-1} \circ X \leq t\} = \{X \leq F(t)\}$, und diese Menge ist ein Ereignis, weil X ein Zufallsvariable ist.

Transformierte Zufallsvariablen

Beweis. 3. Schritt: die Funktion F ist die Verteilungsfunktion von $F^{-1} \circ X$.

- Sei $Y = F^{-1} \circ X$ mit Verteilungsfunktion F_Y.
- Falls $t \geq b$, dann gilt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(F^{-1} \circ X \leq t) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

- F ist monoton steigend und $\lim_{s \to \infty} F(s) = 1$ gilt, also folgt $F(t) \leq 1$.
- Aber $F(t) \geq F(b) > F(s)$ für alle $s \in (a; b)$, also muss $F(t) \geq 1$ gelten.

$\Rightarrow$ $F(t) = 1 = F_Y(t)$.

Transformierte Zufallsvariablen

Beweis. 3. Schritt: die Funktion F ist die Verteilungsfunktion von $F^{-1} \circ X$.

- Falls $t \leq a$, dann ergibt sich $F(t) = 0 = F_Y(t)$ ähnlicherweise.
- Falls $t \in (a; b)$, dann gilt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(F^{-1} \circ X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq F(t)) = F(t),$$

  denn X ist uniformverteilt aufs Intervall $(0; 1)$ und $F(t) \in (0; 1)$.

Transformierte Zufallsvariablen

Beispiel. Die Verteilungsfunktion einer exponetialverteilten Zufallsvariablen ist

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $\lambda > 0$ ein Parameter ist. Dann ist die Einschränkung

$$F\,|_{(0;\infty)} : (0;\infty) \to (0;1)$$

eine Bijektion.

Falls $X \sim U(0;1)$ uniformverteilt ist, dann gilt $F^{-1} \circ X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ nach dem obigen Satz.

Transformierte Zufallsvariablen

Beispiel. Um die Umkehrfunktion von F zu bestimmen, muss man in der Gleichung

$$1 - e^{-\lambda t} = s$$

die Variable t ausdrücken:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - s).$$

Also ist die Variable $-\dfrac{\log(1 - X)}{\lambda}$ exponentialverteilt mit Parameter λ.

Erwartungswert noch einmal

Betrachten wir eine absolut stetige Zufallsvariable X mit einer Verteilungsfunktion F_X, die

- für alle $t < 0$ den Wert 0 annimt,
- und auf dem Intervall $(0; \infty)$ differenzierbar ist.

Dann ist die Funktion

$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t), & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Dichtefunktion von X.

Erwartungswert noch einmal

Nach Definition haben wir

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt = \int_0^{\infty} t \cdot F_X'(t)\,dt.$$

Wir verwenden partielle Integration, aber statt $F_X(t)$ betrachten wir die Stammfunktion $F_X(t) - 1$ von $f_X(t)$, die den Grenzwert 0 in Unendlich hat. Wir nehmen noch an, dass auch

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot (F_X(t) - 1) \to 0$$

gilt. Z.B. die Exponetialverteilung erfüllt diese Annahmen.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= [t \cdot (F_X(t) - 1)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (F_X(t) - 1)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F_X(t))\,dt.\end{aligned}$$

Erwartungswert noch einmal

Man kann beweisen, dass die Formel

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt$$

- für alle nichtnegativen absolut stetigen Zufallsvariablen,
- und auch für alle nichtnegativen diskreten Zufallsvariablen,
- und auch im Allgemeinen, **für alle nicht negativen Zufallsvariablen gilt**.

Erwartungswert noch einmal

Korollar.

a) Seien X und Y nichtnegative Zufallsvariablen, für die $X \leq Y$ gilt. Dann gilt auch $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

b) Seien X und Y Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten, für die $X \leq Y$ gilt. Dann gilt auch $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Beweis. a) Wegen $X \leq Y$ gilt $\{Y \leq t\} \subset \{X \leq t\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also folgt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t),$$

und dann $1 - F_X(t) \leq 1 - F_Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt \leq \int_0^\infty (1 - F_Y(t))\, dt = \mathbb{E}(Y).$$

Erwartungswert noch einmal

Beweis. b) Falls $X \leq Y$ gilt, dann gelten auch

$$X^+ \leq Y^+ \quad \text{und} \quad Y^- \leq X^-$$

für die positiven und negativen Teilen. Wegen a) folgt

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) \leq \mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}(Y).$$

Erwartungswert noch einmal

Korollar. Seien $0 < q < p$ positive reelle Zahlen, und nehmen wir an, dass $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für eine Zufallsvariable X gilt. Dann gilt auch $\mathbb{E}(|X|^q) < \infty$.

Beweis. Die Integrale

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^\infty (1 - F_{|X|^p}(t))\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^1 (1 - F_{|X|^p}(t))\,dt$$

sind endlich, folglich gilt auch

$$\mathbb{E}(|X|^p) - \int_0^1 (1 - F_{|X|^p}(t))\,dt = \int_1^\infty (1 - F_{|X|^p}(t))\,dt < \infty.$$

Erwartungswert noch einmal

Beweis. Für eine Zahl $t \geq 1$ gilt $t^{1/p} \leq t^{1/q}$ (denn $1/p < 1/q$), also

$$|X|^p \leq t \iff |X| \leq t^{1/p} \implies |X| \leq t^{1/q} \iff |X|^q \leq t,$$

d.h.

$$F_{|X|^p}(t) = \mathbb{P}(|X|^p \leq t) \leq \mathbb{P}(|X|^q \leq t) = F_{|X|^q}(t),$$

und dann

$$\int_1^\infty (1 - F_{|X|^q}(t))\, dt \leq \int_1^\infty (1 - F_{|X|^p}(t))\, dt < \infty,$$

also

$$\mathbb{E}(|X|^q) = \int_0^1 (1 - F_{|X|^q}(t))\, dt + \int_1^\infty (1 - F_{|X|^q}(t))\, dt < \infty.$$