

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

5. Woche

Dávid Tóth (BME SZIT)

3. Oktober 2024

Beispiel.

- Sei K der Einheitskreis in der Ebene (mit Mittelpunkt O , wo O der Ursprung ist). Wir wählen einen Punkt zufällig in K . Sei Z der Abstand zwischen O und dem gewählten Punkt.
- Dann ist $Z : K \rightarrow \mathbb{R}$, $Z(P) = |OP|$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ t^2, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } t \geq 1. \end{cases}$$

Dichtefunktion

- Zusätzlich,

$$F_Z(t) - F_Z(s) = \mathbb{P}(s < Z \leq t)$$

gilt für beliebige reelle Zahlen $s < t$.

- Wir sahen bei diesem Beispiel (also für die Variable Z), dass $\mathbb{P}(Z = t) = 0$ für jede $t \in \mathbb{R}$ gilt.
- Wir haben die disjunkte Zerlegung

$$\{s < Z \leq t\} = \{s < Z < t\} \cup \{Z = t\},$$

folglich gilt auch

$$\mathbb{P}(s < Z < t) = F_Z(t) - F_Z(s).$$

Dichtefunktion

Bemerkung.

- Zwar $\mathbb{P}(Z = t) = 0$, aber die Verteilungsfunktion liefert Information darüber, wie wahrscheinlich ist, dass der Wert von Z in der Nähe von t liegt. Nämlich gilt

$$\mathbb{P}(t - \varepsilon < Z < t + \varepsilon) = F_Z(t + \varepsilon) - F_Z(t - \varepsilon)$$

für jede (kleine) $\varepsilon > 0$.

- Die Funktion F_Z ist stetig, und deshalb konvergiert die obige Differenz auf der rechten Seite gegen 0, wenn man ε gegen 0 schickt.
- Das entspricht unseren Erwartungen, weil die linke Seite wegen der Stetigkeit des Masses gegen den Wert $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$ konvergieren muss.

Dichtefunktion

Bemerkung.

- Wenn aber auch die Länge der Umgebung berücksichtigt wird, d.h. wenn wir den Quotient

$$\frac{\mathbb{P}(t - \varepsilon < Z < t + \varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{F_Z(t + \varepsilon) - F_Z(t - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

betrachten, dann gibt dieser Bruch ein approximatives Gewicht für den Punkt t , das die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass Z ihren Wert in der Nähe von t annimmt.

- Wenn wir den Parameter ε weglassen möchten, können wir ε nach 0 schicken:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_Z(t + \varepsilon) - F_Z(t - \varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{F_Z(t + \varepsilon) - F_Z(t)}{(t + \varepsilon) - t} + \frac{F_Z(t - \varepsilon) - F_Z(t)}{(t - \varepsilon) - t} \right] = F'_Z(t),$$

falls die Ableitung existiert.

Dichtefunktion

D.h.:

- zwar können wir nicht eine positive Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z = t)$ jeder Zahl $t \in \mathbb{R}$ zuordnen,
- aber wir können das Gewicht $F'_Z(t)$ zuordnen und sagen, dass Z ihren Wert mit Wahrscheinlichkeit ungefähr $\approx 2\varepsilon \cdot F'_Z(t)$ in der ε -Umgebung von t annimmt (falls F_Z in t differenzierbar ist!!!).

Dichtefunktion

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ t^2, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } t \geq 1. \end{cases}$$

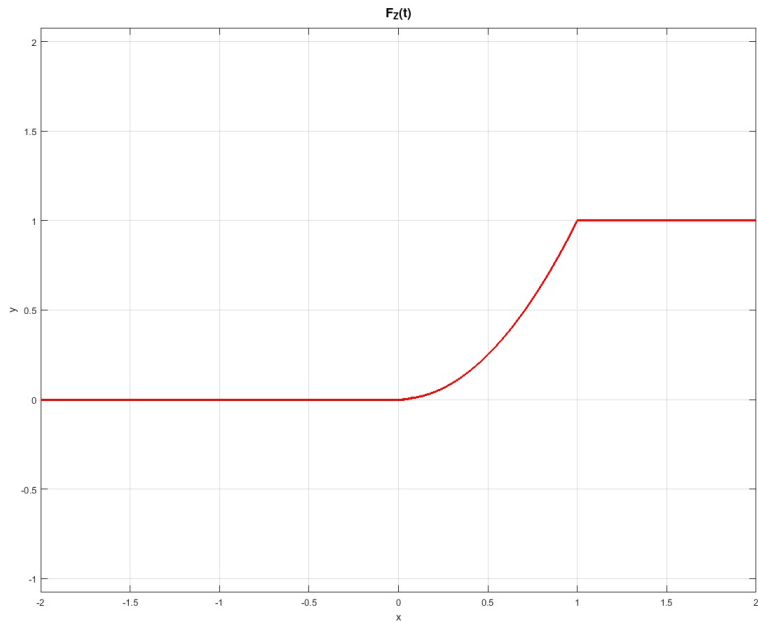
- Auf den Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ ist F_Z konstant oder durch ein Polynom angegeben, also ist sie hier differenzierbar.
- In 0 sind die links- und rechtsseitigen Ableitungen gleich, also ist $F_Z(t)$ auch in $t = 0$ differenzierbar.
- Aber $F_Z(t)$ ist nicht differenzierbar in $t = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{F_Z(t) - F_Z(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1-0} t + 1 = 2,$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{F_Z(t) - F_Z(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{1 - 1}{t - 1} = 0.$$

Stetige Zufallsvariablen



Dichtefunktion

Definieren wir die Funktion f_Z folgenderweise:

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2t, & \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Also ist f_Z die Ableitung von F_Z außer 1, wo sie 0 ist.

Wegen der Formel von Newton und Leibniz können wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(s < Z < t)$ auch mit f_Z ausdrücken:

$$\mathbb{P}(s < Z < t) = F_Z(t) - F_Z(s) = \int_s^t f_Z(y) dy,$$

und die obige gilt für alle $s < t$, falls F_Z **differenzierbar** auf $(s; t)$ und **stetig** auf $[s; t]$ ist, also für alle $s < t \leq 1$ und $1 \leq s < t$.

Dichtefunktion

Aber für $s < 1 < t$ können wir den Integral trennen:

$$\begin{aligned}\int_s^t f_Z(y) dy &= \int_s^1 f_Z(y) dy + \int_1^t f_Z(y) dy \\ &= F_Z(1) - F_Z(s) + F_Z(t) - F_Z(1) = F_Z(t) - F_Z(s),\end{aligned}$$

also gilt immer

$$\mathbb{P}(s < Z < t) = F_Z(t) - F_Z(s) = \int_s^t f_Z(y) dy.$$

Dichtefunktion

Endlich drücken wir noch den Wert $F_Z(t)$ anhand f_Z aus.
Die Funktion F_Z ist eine Verteilungsfunktion, also gilt
 $\lim_{s \rightarrow -\infty} F_Z(s) = 0$, und dann

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= F_Z(t) - \lim_{s \rightarrow -\infty} F_Z(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (F_Z(t) - F_Z(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^t f_Z(y) dy = \int_{-\infty}^t f_Z(y) dy. \end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen

Definition. Eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X heißt *absolut stetig* (abszolút folytonos), wenn es eine Riemann-integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$ gibt, für die

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(y) dy$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion f_X heißt die *Dichte* oder *Dichtefunktion* (sűrűségfüggvény) von X .

Stetige Zufallsvariablen

Bemerkung. Im Allgemeinen nennt man eine Zufallsvariable stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion stetig ist. Jede absolut stetige Variable ist stetig (weil eine Integralfunktion immer stetig ist - der Beweis kommt später), aber es gibt stetige Zufallsvariablen, die nicht absolut stetig sind, also keine Dichtefunktion haben.

Im Folgenden benutzen wir das Wort "stetig" für absolut stetige Variablen, weil wir keine stetige Variable betrachten werden, die nicht absolut stetig ist.

Stetige Zufallsvariablen

Bemerkung. Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen ist nicht eindeutig bestimmt. Man kann zum Beispiel die Werte einer Riemann-integrierbar Funktion auf endlich vielen Stellen verändern, ohne die Integrale

$$\int_{-\infty}^t f_X(y) dy$$

zu modifizieren.

Stetige Zufallsvariablen

Die Variable Z im obigen Beispiel ist nach der obigen Definition absolut stetig, und f_Z ist eine Dichtefunktion von Z . (In der Tat soll man dazu noch zeigen, dass f_Z Riemann-integrierbar auf der ganzen Menge $\mathbb{R}$, aber das ist offenbar, denn $f_Z(t) = 0$ gilt außer $(0; 1)$.)

Die Argumentation, dass für die Variable Z durchgeführt wurde, bleibt richtig (etwa mit einigen kleinen Modifikationen), wenn die Verteilungsfunktion F stetig und außer endlich vielen Stellen auch differenzierbar ist.

Stetige Zufallsvariablen

Satz. Nehmen wir an, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X stetig und mit Ausnahme von endlich vielen Punkten differenzierbar ist. Dann ist die Variable X (absolut) stetig, und die Funktion

$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t), & \text{falls } F_X \text{ in } t \text{ differenzierbar ist,} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

ist eine Dichtefunktion von X .

Stetige Zufallsvariablen

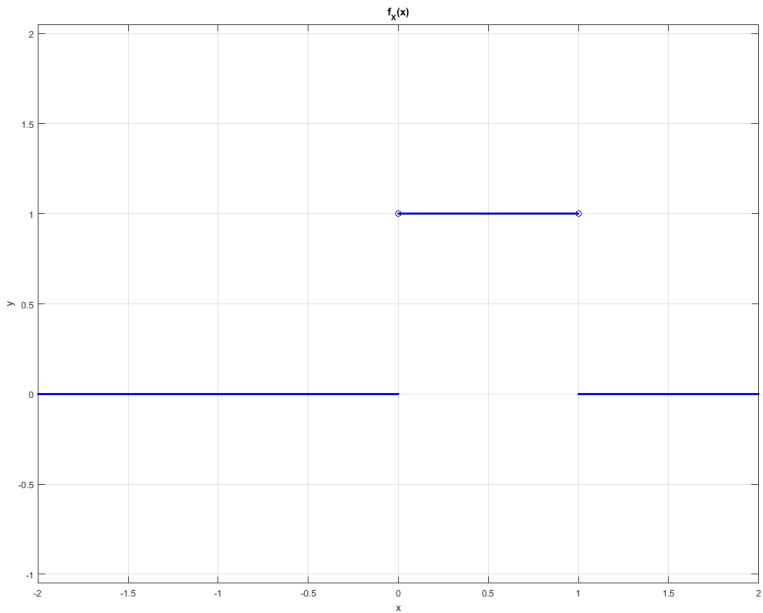
Beispiel. Sei X der Wert einer im Intervall $[0; 1]$ zufällig gewählten Zahl, dann gilt

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ t, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } t \geq 1, \end{cases}$$

also

$$f_X(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Stetige Zufallsvariablen



Stetige Zufallsvariablen

Beispiel. Sei $Y = X^2$, dann gilt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}),$$

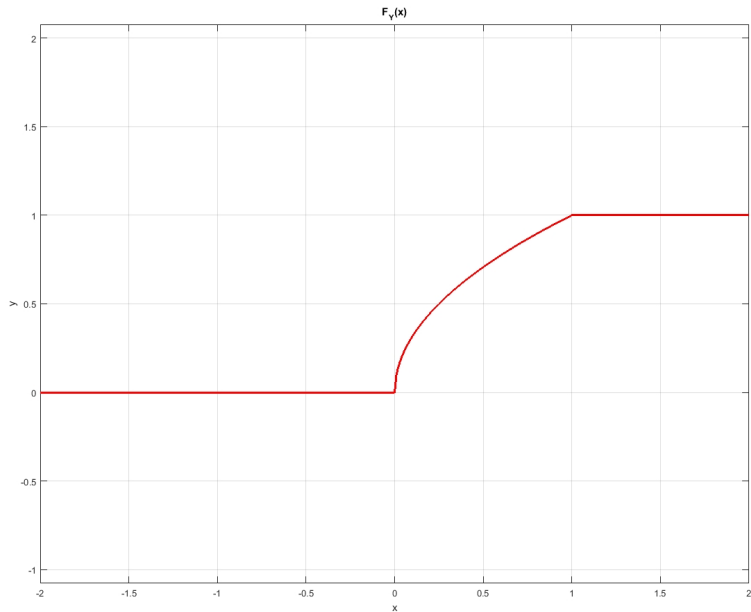
falls $0 < t$. Also

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{falls } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{falls } t \geq 1, \end{cases}$$

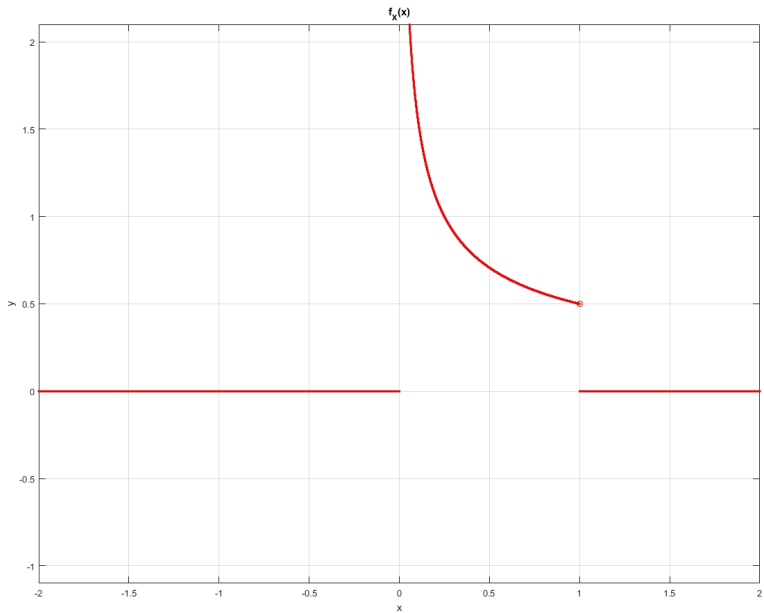
und deshalb

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}, & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Stetige Zufallsvariablen



Stetige Zufallsvariablen



Stetige Zufallsvariablen

Bemerkung. Wenn die Zufallsvariable X absolut stetig ist, dann ist ihre Verteilungsfunktion F_X auch stetig.

Beweis. Sei f_X die Dichtefunktion von X , dann gilt

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(y) dy.$$

Die Funktion f_X ist Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[t - 1; t + 1]$, also ist sie hier beschränkt:

$$0 \leq f_X(u) \leq K_t$$

gilt für alle $u \in [t - 1; t + 1]$.

Stetige Zufallsvariablen

Dann

$$\begin{aligned}|F_X(t) - F_X(u)| &= \left| \int_{-\infty}^t f_X(y) dy - \int_{-\infty}^u f_X(y) dy \right| \\&= \left| \int_u^t f_X(y) dy \right| = \int_{\min(t,u)}^{\max(t,u)} f_X(y) dy \\&\leq |t - u| \cdot K_t.\end{aligned}$$

Folglich ist $|F_X(t) - F_X(u)|$ klein, falls $|t - u|$ klein ist.

Stetige Zufallsvariablen

Korollar. Sei X eine stetige Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X = t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit gilt

$$\mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - \lim_{s \rightarrow t-0} F_X(s) = 0.$$

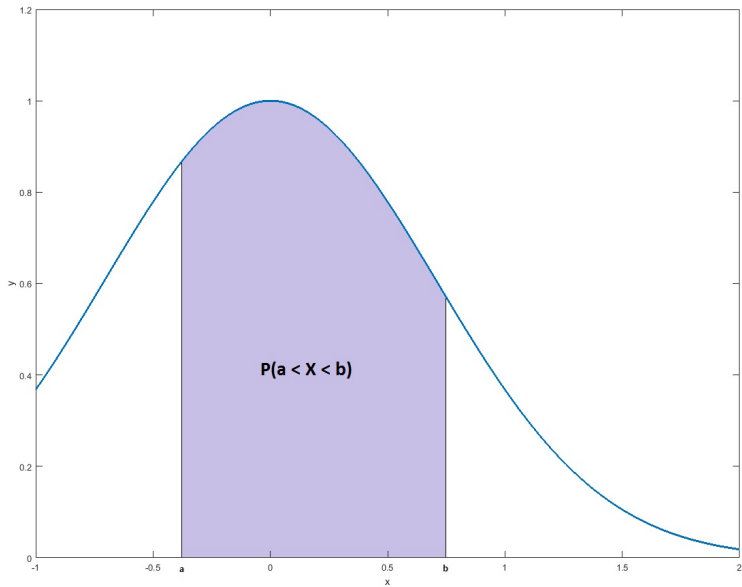
Stetige Zufallsvariablen

Behauptung. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_s^t f_X(y) dy &= \mathbb{P}(s < X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(s < X < t) + \mathbb{P}(X = t) \\ &= \mathbb{P}(s < X < t) \\ &= \mathbb{P}(s \leq X < t) \\ &= \mathbb{P}(s \leq X \leq t)\end{aligned}$$

für alle $s < t$.

Stetige Zufallsvariablen



Stetige Zufallsvariablen

Beweis. Es ist ausreichend, nur die erste Behauptung zu zeigen, die andere folgen dann aus $\mathbb{P}(X = s) = \mathbb{P}(X = t) = 0$. Wegen einer früheren Behauptung gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(s < X \leq t) &= F_X(t) - F_X(s) \\ &= \int_{-\infty}^t f_X(y) dy - \int_{-\infty}^s f_X(y) dy.\end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen

Für eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$ gilt

$$\int_u^v g(y) dy + \int_v^w g(y) dy = \int_u^w g(y) dy,$$

wo $u < v < w$ beliebige reelle Zahlen sind, und zusätzlich $u = -\infty$ und $w = \infty$ auch möglich sind.

Also

$$\int_{-\infty}^t f_X(y) dy - \int_{-\infty}^s f_X(y) dy = \int_s^t f_X(y) dy.$$

Stetige Zufallsvariablen

Behauptung. Falls die Dichtefunktion f_X einer Zufallsvariablen X in einem Punkt t_0 stetig ist, dann ist die Verteilungsfunktion

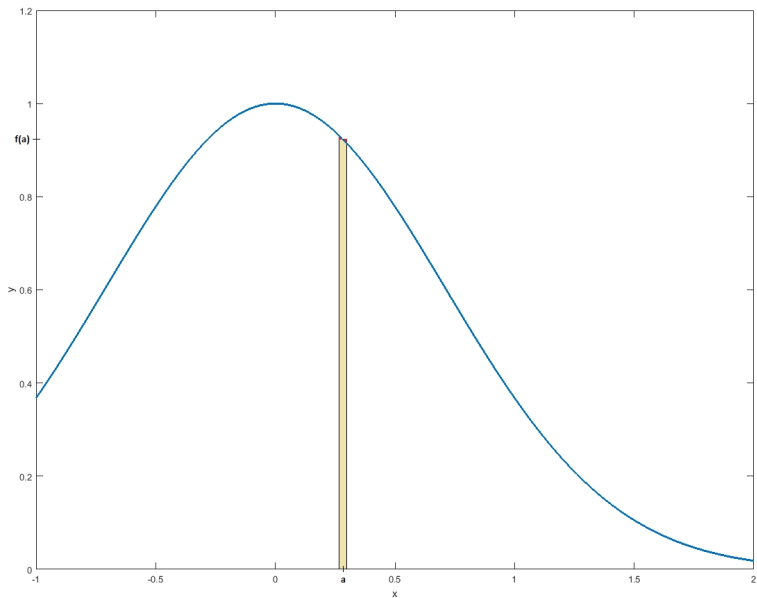
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds$$

in t_0 differenzierbar, und $F'_X(t_0) = f_X(t_0)$.

Stetige Zufallsvariablen

Bemerkung. Wenn die Dichtefunktion von X in einem Punkt t stetig ist, dann bestimmt ihr Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X in der Nähe von t liegt. Der Integral von f_X über $[t - \varepsilon; t + \varepsilon]$ ist nämlich ungefähr der Wert $2\varepsilon f_X(t)$.

Stetige Zufallsvariablen



Stetige Zufallsvariablen

Satz. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$ ist genau dann eine Dichtefunktion einer Zufallsvariablen, falls sie Riemann-integrierbar ist, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

gilt.

Beweis einer Richtung. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X . Dann ist f_X nichtnegativ, Riemann-integrierbar, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f_X(y) dy = \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1,$$

wo F_X die Verteilungsfunktion von X ist.

Stetige Zufallsvariablen

Definition. Eine Zufallsvariable X heißt *uniformverteilt* auf einem Intervall $[a; b]$ (egyenletes eloszlású az $[a; b]$ intervallumon), wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, falls die Dichtefunktion von X durch die folgende Formel angegeben ist:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a < t < b, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Wir benutzen dann die Notation $X \sim U(a; b)$.

(Die obige Funktion ist wirklich eine Dichtefunktion, weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = \int_a^b \frac{1}{b-a} dy = \left[\frac{y}{b-a} \right]_a^b = 1$$

gilt.)

Stetige Zufallsvariablen

Sei $X \sim U(a; b)$, dann gilt

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < a, \\ \frac{t - a}{b - a}, & \text{falls } a \leq t < b, \\ 1, & \text{falls } t \geq b. \end{cases}$$

Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

Definition. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X . Nehmen wir an, dass der Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_X(y) dy \quad (1)$$

endlich ist. Dann ist der Integral

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_X(y) dy$$

auch endlich, und er heißt der Erwartungswert von X .

Wenn der Integral in (1) nicht endlich ist, dann kann der Erwartungswert von X $\pm\infty$ sein, oder es ist auch möglich, dass $\mathbb{E}(X)$ nicht existiert. Diese Fälle werden später diskutiert. In diesem Kurs werden die Erwartungswerte (fast) immer endlich.

Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

Sei $X \sim U(a; b)$, dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy = \int_a^b \frac{y}{b-a} dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

Satz. Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Zufallsvariablen, für die die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ endlich sind. Dann ist auch der Erwartungswert $\mathbb{E}(X + Y)$ endlich, und

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$$

gelten für alle $c \in \mathbb{R}$.

Exponentialverteilung

Definition. Eine Zufallsvariable X heißt *exponentialverteilt* (exponenciális eloszlású) mit Parameter $\lambda > 0$, falls X (absolut) stetig ist, und die Dichtefunktion von X durch die folgende Formel angegeben ist:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Wir benutzen dann die Notation $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Bemerkung. Die obige Funktion ist wirklich eine Dichtefunktion, weil sie nichtnegativ ist, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[-e^{-\lambda y} \right]_0^{\infty} = 1.$$

Exponentialverteilung

Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f_X(s) ds \\ &= \begin{cases} \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[-e^{-\lambda y} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exponentialverteilung

Der Erwartungswert für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X wird durch partielle Integration erhalten:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y) dy = \int_0^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy \\ &= \left[-y e^{-\lambda y} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy = 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit

Definition. Eine Zufallsvariable heißt *gedächtnislos* (örökifjú) auf der Menge $G \subset \mathbb{R}$, wenn

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

für jede $s, t \in G$ gilt, und $\mathbb{P}(X \in G) = 1$.

Erinnerung. Sei $X \sim \text{Geo}(p)$, dann ist X gedächtnislos auf der Menge $\mathbb{N}^+$.

Hier bedeutet die Gedächtnislosigkeit, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mehr als t Experimenten bis zum ersten Erfolg machen muss, nachdem man zuvor s Experimenten ohne Erfolg gemacht hat, für beliebige s gleich ist.

Gedächtnislosigkeit

Behauptung. Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos auf der Menge $[0, \infty)$.

Beweis. Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Für jede $s, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} \\&= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq s + t)}{1 - \mathbb{P}(X \leq s)} = \frac{1 - F_X(s + t)}{1 - F_X(s)} \\&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\&= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F_X(t) \\&= 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X > t)\end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit

Satz. Sei X eine Zufallsvariable, die auf einer Menge G gedächtnislos ist.

- a) Falls $G = \mathbb{N}^+$, dann ist X geometrisch verteilt.
- b) Falls $G = [0, \infty)$, dann ist X exponentialverteilt.

Gedächtnislosigkeit

Bemerkung. Eine exponentialverteilte Zufallsvariable beschreibt oft eine Wartezeit.

Beispiel. Wir warten an einem Abend in August auf eine Sternschnuppe. Wir sehen eine Sternschnuppe in den ersten 20 Minuten mit Wahrscheinlichkeit $1 - e^{-\frac{2}{3}}$. Wir können annehmen, dass die Wartezeit bis zur ersten Sternschnuppe nicht davon abhängt, wie viel man vorher gewartet hat. D.h. die Verteilung der Wartezeit ist stetig und gedächtnislos.

Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir innerhalb einer Stunde eine Sternschnuppe sehen?

Gedächtnislosigkeit

Lösung. Sei X die Wartezeit bis zur ersten Sternschnuppe (in Stunden). Da X nichtnegativ, stetig und gedächtnislos ist, wissen wir, dass $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit einem Parameter $\lambda > 0$ gilt. Also

$$\mathbb{P}(X \leq 1/3) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{3}} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,4866,$$

d.h. $\lambda = 2$. Dann

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-2} \approx 0,8647.$$