

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

1. Woche

Dávid Tóth (BME SZIT)

2., 5. September 2024

Warum lernt man Wahrscheinlichkeitstheorie?

- zufällige Phänomene in den Alltags: z.B. Glücksspiele
- sie spielt eine wichtige Rolle in solchen Situationen, wenn ein Ereignis von unbekannten oder zu vielen Faktoren beeinflußt ist, und deswegen kann man den Ausgang nicht präzis bestimmen

Verwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie:

- wo sich die Wahrscheinlichkeit ursprünglich befindet:
Statistik, Messungen, (auch durch die Statistik) in fast allen Wissenschaften (Physik, Biologie, Ökonomie, usw.)
- und wohin wir die Wahrscheinlichkeit bringen:
randomisierten Algorithmen, Kryptographie, künstliche Intelligenz, Graphentheorie, usw.

Mathematisches Modell des Zufalls

Experiment $\rightarrow$ (zufälliger) Ausgang

Aspekten der Modellbildung:

- wir möchten alle möglichen Ausgänge zusammen behandeln
 - zufällige Ereignisse ergeben sich nicht nur als Ausgänge von Experimenten: z.B. die Anzahl der Verkehrsunfälle an einem Tag in einer Stadt kann als eine zufällige Quantität betrachtet werden, aber das Ziel des Verkehrs ist nicht die Beobachtung der Unfälle, und die Situationen sind nicht reproduzierbar
- $\Rightarrow$ nicht das Experiment ist wichtig (im Modell), sondern die möglichen Ergebnisse

Mathematisches Modell des Zufalls

Bildung des mathematischen Modells (erster Schritt):

mögliche Ausgänge $\longleftrightarrow$ mathematische Objekten

Beispiele:

- ein Würfel wird geworfen: den Ergebnissen werden die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zugeordnet
- eine Münze wird fünfmal geworfen: den Ausgängen werden $K - Z$ (Kopf-Zahl) Sequenzen der Länge 5 zugeordnet, z.B. $KZKKZ$ ist ein mögliches Ergebnis

Ergebnismenge

- Unser Modell ist also eine nicht leere Menge, deren Elemente zu den möglichen Ergebnissen gehören.
- Diese Menge ist die *Ergebnismenge* (oder Ergebnisraum - eseménytér), sie wird (typisch) mit Ω bezeichnet.
- Die Elemente von Ω sind die *Ergebnisse* (kimenetel vagy elemi esemény), sie werden (typisch) mit ω bezeichnet.

Ergebnismenge

- Diese Definition gibt uns große Freiheit, aber in den konkreten Beispielen ergibt sich die Ergebnismenge oft natürlicherweise.
- Zwar gibt es manchmal mehrere natürliche Möglichkeiten, aber nicht alle von diesen sind immer praktisch.
- In den klassischen Beispielen werden wir typischerweise immer dasselbe Modell wählen.

Ergebnismenge

Beispiele:

- Eine Münze wird geworfen, die möglichen Ergebnisse sind *Kopf* oder *Zahl*, und dementsprechend wählen wir die Ergebnismenge

$$\Omega = \{K, Z\}.$$

- Ein (sechs seitiger) Würfel wird geworfen, dann ist die Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Im "Ötöslottó" zieht man 5 verschiedene aus den Zahlen $1, 2, \dots, 90$ zufällig. Die möglichen Ergebnisse sind also Mengen von 5 ganzen Zahlen, deren Elementen zwischen 1 und 90 sind. D.h., falls $A = \{1, 2, \dots, 90\}$, dann besteht Ω aus den Teilmengen von A der Mächtigkeit 5:

$$\Omega = \{B \subset A : |B| = 5\}.$$

($|B|$ bezeichnet die Mächtigkeit der Menge B)

Ereignisse

Bei den zufälligen Phänomenen kann nicht nur das Ergebnis wichtig sein, andere dazugehörige Fragen können auch gestellt werden. Z.B:

- Bei einem Wurf mit einem Würfel: ist das Ergebnis größer als drei?
- Bei der Lottoziehung: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unsere Lieblingszahl gezogen wird?

Die oben beschriebenen Ereignisse sind auch zufällig, aber es ist nicht praktisch, eine neue Ergebnismenge zu definieren, wenn sich eine Frage auf einen schon früher modellierten Ausgang bezieht.

Zum Beispiel: ein Wurf größer als 3 kann auch so beschrieben werden, dass eine der Zahlen 4, 5 oder 6 geworfen wurde, also mit der Teilmenge $\{4, 5, 6\}$ der Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ereignisse

Definition. Sei Ω eine Ergebnismenge, dann heißt eine Teilmenge von Ω ein *Ereignis* (esemény). Wir sagen, dass das Ereignis $A \subset \Omega$ bei einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ *eintritt* (bekövetkezik az A esemény), falls $\omega \in A$ gilt.

Beispiel. Ein Würfel wird geworfen, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- sei G das Ereignis, dass eine gerade Zahl geworfen wird, dann gilt $G = \{2, 4, 6\}$;
- sei P das Ereignis, dass eine Primzahl geworfen wird, dann gilt $P = \{2, 3, 5\}$;
- das Ereignis, dass eine ganze Zahl geworfen wird, ist durch die (ganze) Menge Ω beschreibt;
- das Ereignis, dass eine irrationale Zahl geworfen wird, ist unmöglich, kein Ergebnis erfüllt diese Eigenschaft, also ist dieses Ereignis durch die leere Menge beschreibt (Bezeichnung: $\emptyset$).

Ereignisse

Die Teilmenge Ω und $\emptyset$ sind immer Ereignisse:

- Ω tritt bei jedem Ergebnis ein, deshalb heißt diese Menge das *sichere Ereignis* (biztos esemény),
- für ein beliebiges Element $\omega \in \Omega$ gilt $\omega \notin \emptyset$, deshalb heißt die leere Menge das *unmögliche Ereignis* (lehetetlen esemény).

Ereignisse

Beispiel. Betrachten wir eine Lottoziehung, und sei H das Ereignis, dass die Zahl 3 gezogen wird. Dann besteht H aus die Teilmengen der Menge $A = \{1, 2, \dots, 90\}$, die gerade fünf Elementen und zwischen diesen die Zahl 3 enthalten.

Verknüpfungen von Ereignissen

- Die Ereignisse werden oft so angegeben, dass man Ω auf die Menge solcher Ergebnisse beschränkt, die bestimmten Eigenschaften erfüllen.
- Diese Eigenschaften können durch logische Operatoren verknüpft werden, und diese Verknüpfungen ergeben dann neue Ereignisse.
- Die so erhaltenen Ereignisse können durch entsprechende Mengeoperationen ausgedrückt werden.

Verknüpfungen von Ereignissen

Beispiel. Ein Würfel wird geworfen, G (bzw. P) ist das Ereignis, dass eine gerade Zahl (bzw. Primzahl) geworfen wird. Betrachten wir das Ereignis, dass

die geworfene Zahl gerade *und* eine Primzahl ist.

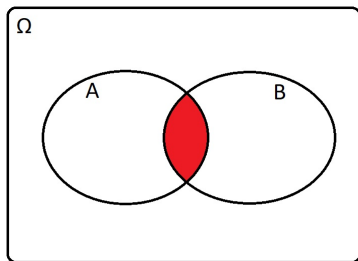
Diese Eigenschaft ist von solchen Ergebnissen $\omega \in \Omega$ erfüllt, die in beiden Mengen G und P enthalten sind, also ist dieses Ereignis

$$G \cap P = \{2\}.$$

Verknüpfungen von Ereignissen

Und-Verknüpfung $\longleftrightarrow$ der *Schnitt* von Mengen

Falls $A, B \subset \Omega$ beliebige Ereignisse sind, dann besteht $A \cap B$ aus den Ergebnissen, die in beiden Mengen A und B enthalten sind.



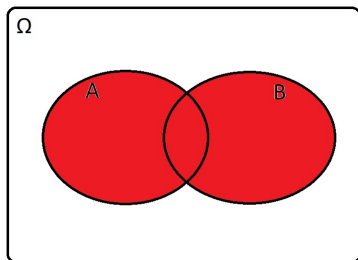
Figur: $A \cap B$

Verknüpfungen von Ereignissen

Oder-Verknüpfung $\longleftrightarrow$ die Vereinigung von Mengen

$A \cup B$ ist die Menge der Ergebnisse, die in mindestens einer der zwei Mengen A und B enthalten sind. Im obigen Beispiel: die geworfene Zahl ist gerade oder eine Primzahl,

$$G \cup P = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

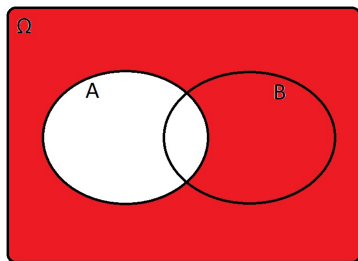


Figur: $A \cup B$

Verknüpfungen von Ereignissen

Nein-Verknüpfung $\longleftrightarrow$ das *Komplement* von Mengen

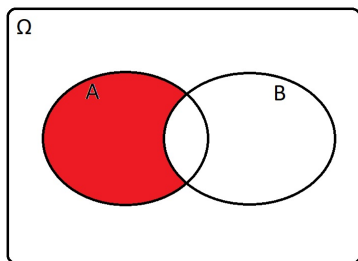
$\overline{A} := \Omega \setminus A$ besteht aus den Ergebnissen von Ω , die nicht in A enthalten sind. Im obigen Beispiel: die geworfene Zahl ist *nicht* gerade, $\overline{G} = \{1, 3, 5\}$.



Figur: $\overline{A}$

Verknüpfungen von Ereignissen

Die *Mengendifferenz*: $A \setminus B$ besteht aus den Ergebnissen der Menge A , die nicht in B enthalten sind. Im obigen Beispiel: die geworfene Zahl ist gerade, *aber keine* Primzahl, $G \setminus P = \{4, 6\}$.



Figur: $A \setminus B$

Verknüpfungen von Ereignissen

Wichtige Eigenschaften der Mengeoperationen:

1. Die Vereinigung und der Schnitt Operationen sind assoziativ und kommutativ:

$$\begin{array}{ll} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A. \end{array}$$

2. Die folgenden Distributivgesetze gelten:

$$\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{array}$$

3. Die Mengedifferenz kann durch das Komplement folgenderweise ausgedrückt werden: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
4. Das Komplement des Komplements eines Ereignisses ist das ursprüngliches Ereignis: $\overline{\overline{A}} = A$.

Verknüpfungen von Ereignissen

Behauptung. (de-morgansche Gesetze) Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse, dann gilt

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Analoge Gleichungen gelten auch für mehrere Ereignisse:

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i,$$

und hier könnten wir sogar das Komplement der Vereinigung bzw. des Schnittes von unendlich viele Ereignissen betrachten (also könnten wir ∞ anstatt n schreiben), die analogen Behauptungen bleiben richtig.

Verknüpfungen von Ereignissen

Übung:

Seien A , B und C Ereignisse. Geben wir Ausdrücke für die folgenden Ereignisse anhand der Mengeoperationen:

- a) mindestens eines der Ereignisse A , B und C tritt ein:
- b) A und B treten ein, aber C nicht:
- c) genau eines der Ereignisse A , B und C tritt ein:

Verknüpfungen von Ereignissen

Übung:

Seien A , B und C Ereignisse. Geben wir Ausdrücke für die folgenden Ereignisse anhand der Mengeoperationen:

- a) mindestens eines der Ereignisse A , B und C tritt ein:

$$A \cup B \cup C$$

- b) A und B treten ein, aber C nicht:

$$(A \cap B) \setminus C \text{ oder } A \cap B \cap \overline{C}$$

- c) genau eines der Ereignisse A , B und C tritt ein:

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

Ereignisse

Definition. Die Ereignissen $A, B \subset \Omega$ sind *disjunkt* (oder sich gegenseitig ausschließend - egymást kizáró események), falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Beispiel. A und $\bar{A}$ sind für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ disjunkt, weiter gilt $\Omega = A \cup \bar{A}$ immer.

Bemerkung.

- Die Definition des Begriffs "Ereignis" war eigentlich nicht präzise. Andere Quellen (Bücher, Skripts, Webseiten) enthalten komplizierter Definitionen.
- Um die Wahrscheinlichkeitstheorie in voller Allgemeinheit aufzubauen, kann eine beliebige Teilmenge einer Ergebnisraum nicht (immer) als Ereignis betrachtet werden.
- In vielen Fällen kann man aber ohne Beschränkungen arbeiten: falls die Ergebnismenge abzählbar (endlich oder abzählbar unendlich) ist, dann können (und in diesem Kurs auch werden) wir alle Teilmengen der Ergebnismenge als Ereignis betrachten.
- Im Allgemeinen lassen sich die obigen Verknüpfungen der Ereignissen uneingeschränkt ausführen, also ist der Schnitt, die Vereinigung, usw. von zwei Ereignissen immer ein Ereignis.

Mathematisches Modell des Zufalls

Bildung des mathematischen Modells (zweiter Schritt):

zufälliges Ereignis $\mapsto$ Wahrscheinlichkeit

- Die Wahrscheinlichkeit ist einfach eine Zahl: wir skalieren die Chancen zwischen "unmöglich" und "sicher".
- Wir könnten die Skala im Intervall $[0; 100]$ angeben (und wir machen das in der Tat, wenn wir die Chancen in Prozenten ausdrücken), aber es ist in der Mathematik praktischer, den Intervall $[0; 1]$ zu benutzen.

Mathematisches Modell des Zufalls

Verschiedene Überlegungen können zur Definition der Wahrscheinlichkeit führen.

Beispiel. Eine empirische Argumentation.

- Nach mehrmaligen Wiederholungen eines Experiments: das Verhältnis der Anzahl eines Ergebnisses und der Anzahl der Experimenten gibt die *relative Häufigkeit* des Ergebnisses.
- Eine Wahrscheinlichkeit kann so betrachtet werden, als eine Zahl, die diese relative Häufigkeit immer mehr annähert, falls die Anzahl der Experimenten immer größer wird.
- Z.B.: wenn ein regulärer Würfel vielmal geworfen wird, dann findet man, dass die relative Häufigkeit jedes möglichen Ergebnisses ungefähr $1/6$ ist.
- Die Summe der Anzahlen aller verschiedenen Ergebnisse ist immer die Anzahl der Experimenten. $\Rightarrow$ Die Summe der relativen Häufigkeiten ist immer 1. Dementsprechend erwarten wir, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse 1 sein soll.

Mathematisches Modell des Zufalls

Beispiel.

- Beim Wurf eines Würfels kann auch eine andere Argumentation zur Definition der Wahrscheinlichkeit führen.
 - Wenn ein Würfel regulär ist, das bedeutet, dass er homogen und symmetrisch ist. Also gibt es kein physischer Grund darauf, dass der Würfel auf eine Seite (im Durchschnitt) häufiger fallen sollte, als auf eine andere.
- ⇒ Im Idealfall sollte jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
- Es gibt 6 mögliche Ergebnisse ⇒ ihre Wahrscheinlichkeiten werden $1/6$.
 - Der Idealfall tritt in der Wirklichkeit nie auf: es gibt keinen völlig symmetrischen oder homogenen Würfel. Aber wenn die Wirklichkeit das Ideal gut annähert, dann können die Differenzen vernachlässigt werden.

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Am Anfang betrachten wir solche Beispiele, wo jedes Ergebnis dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

Beispiele.

- Eine (reguläre) Münze wird geworfen: in diesem Fall (wenn es nicht anders gesagt ist) nehmen wir immer an, dass ein Kopf und auch eine Zahl mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ erhalten wird.
- Lottoziehung: z.B. beim "Ötöslottó" ist die Anzahl der möglichen Ziehungen $\binom{90}{5}$, also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man alle Zahlen trifft, $\frac{1}{\binom{90}{5}}$.

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Im Allgemeinen:

- Falls die Anzahl der möglichen Ergebnisse n ist (also wenn $|\Omega| = n$ gilt) und jedes Ergebnis mit gleicher Chance erhalten wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit von ihnen $1/n$.
- Wir möchten nicht nur über die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse sprechen, sondern auch die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ereignissen $A \subset \Omega$ definieren.
- Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ besteht aus verschiedenen Ergebnissen, und jedes Element von A gibt $1/n$ zur Chance des Ereignisses, dass A eintritt, also wird die Wahrscheinlichkeit von A durch $|A| \cdot \frac{1}{n} = |A| / |\Omega|$ definiert.

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Definition. Sei Ω eine endliche Ergebnismenge, und sei noch $A \subset \Omega$ ein Ereignis. Nehmen wir an, dass die *Wahrscheinlichkeit* $\mathbb{P}(A)$ von A (az A esemény valószínűsége) ist durch

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

definiert. Dann bilden die Ergebnismenge Ω , die Menge der Ereignisse von Ω (also die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$) und die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse einen sogenannten *Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum* (klasszikus valószínűségi mező).

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit (im Laplaschen Raum):

1. Indem für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ die Ungleichungen $0 \leq |A| \leq |\Omega|$ immer gelten, so gilt auch

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0; 1].$$

2. Das sichere Ereignis, also Ω tritt immer ein, und dementsprechend gilt

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$$

3. Für das unmögliche Ereignis gilt

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0.$$

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit (im Laplaschen Raum):

4. Falls die Ereignisse $A, B \subset \Omega$ disjunkt sind, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$, denn alle Elementen, die in A oder B enthalten sind, wurden in der letzten Summe wegen der Gleichung $A \cap B = \emptyset$ genau einmal abgezählt. So erhält man

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Folgerung. Für alle Ereignis $A \subset \Omega$ sind A und $\bar{A}$ disjunkt, und $A \cup \bar{A} = \Omega$ gilt auch, also

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}).$$

Nach Umordnung ergibt sich

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Was können wir sagen, wenn die Ereignisse A und B nicht (oder nicht notwendig) disjunkt sind?

- $|A \cup B|$ wird in diesem Fall nicht (notwendig) durch die Summe $|A| + |B|$ angegeben, denn die Elemente von $A \cap B$ werden in der letzten Summe zweimal abgezählt.
- Also muss man die Zahl $|A \cap B|$ von der Summe noch abziehen, um den richtigen Ausdruck für $|A \cup B|$ zu erhalten:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Wenn man durch die Anzahl von Ω diese Gleichung dividiert, so ergibt sich die sogenannte *Siebformel* (oder *Poincaré-Formel* - szita- vagy Poincaré-formula) für den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel. Ein Würfel wird geworfen, G : eine gerade Zahl, P : eine Primzahl wird geworfen, Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und

$$\mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(P) = \frac{|P|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(G \cup P)$.

1. Wir bestimmen die Elemente von $G \cup P$. Diese sind die Ergebnisse, die gerade *oder* Primzahl sind, also $G \cup P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, und

$$\mathbb{P}(G \cup P) = \frac{|G \cup P|}{|\Omega|} = \frac{5}{6}.$$

2. Wir können auch die Siebformel benutzen:

$$\mathbb{P}(G \cup P) = \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(G \cap P).$$

Das Ereignis $G \cap P$ besteht aus den Ergebnissen, die gerade *und* Primzahlen sind, das gilt nur für die Zahl 2, also ist die obige Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel. Berechnen wir jetzt die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(G \cup \overline{P})$.
Wir benutzen wieder die Siebformel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \cup \overline{P}) &= \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(\overline{P}) - \mathbb{P}(G \cap \overline{P}) \\ &= \mathbb{P}(G) + 1 - \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(G \cap \overline{P}) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

denn $G \cap \overline{P}$ besteht aus den Ergebnissen, die gerade aber nicht Primzahl sind, also die Zahlen 4 und 6.

Kartesisches Produkt

Beispiel. Wir werfen zwei reguläre Würfel. Wie kann die Ergebnismenge in diesem Fall gewählt werden?

- Ein Ergebnis kann so beschrieben werden, wenn man die Anzahl der einzelnen Augenzahlen angibt. (Z.B.: eine Drei und eine Vier, oder zwei Sechsen wurden geworfen.)
 - Dieses Modell ist nicht immer praktisch: man kann zwischen den Würfeln nicht unterscheiden.
 - Weiter, wenn ein solches Experiment vielmal durchgeführt wird, dann kann man beobachten, dass (zum Beispiel) die Kombination "Drei-Vier" etwa zweimal so häufig vorkommt, wie die Kombination "zwei Sechsen". (Warum?)
- ⇒ Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse sind nicht gleich, so erhalten wir keinen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum.

Kartesisches Produkt

Beispiel. Wir werfen zwei reguläre Würfel. Wie kann die Ergebnismenge in diesem Fall gewählt werden?

- Es ist oft einfacher, mit einem Laplacschen Raum zu arbeiten.
- In diesem Beispiel ist das erriechbar, wenn man zwischen den Würfeln unterscheidet, und den Ergebnissen die geordneten Paare $(i; j)$ zuordnet, wo das erste (bzw. zweite) Element i (bzw. j) der Augenzahl des ersten (bzw. zweiten) Würfels entspricht.
- Wir nehmen an, dass die Ergebnisse der einzelnen Würfe einander nicht beeinflussen. Also gibt der erste Würfel (nach vielen Experimenten) irgendwelche Augenzahl mit relativer Häufigkeit $1/6$, und unabhängig davon gilt das für den zweiten Würfel.

⇒ Also erhält man ein Paar $(i; j)$ mit relativer Häufigkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. D.h., man kann annehmen, dass jedes Ergebnis mit gleicher Wahrscheinlichkeit erhalten wird.

Kartesisches Produkt

Die letzte Ergebnismenge besteht aus geordneten Paaren, und diese sind die Elemente eines sogenannten kartesischen Produkts $\Omega \times \Omega$, wo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Diese Konstruktion kann verallgemeinert werden:

Definition. Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ nicht leere Menge. Dann ist das *kartesische Produkt* dieser Menge (Descartes-sorizat)

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\},$$

es besteht aus geordneten n -Tupeln, deren i -te Komponente das Element von Ω_i für jede $1 \leq i \leq n$ ist.

Kartesisches Produkt

In der letzten Definition ist es nicht angenommen, dass die Mengen Ω_i endlich sind, aber in den ersten paar Wochen werden viele Ergebnismenge in unseren Beispielen endlich.

In diesem Fall ist die Anzahl der Elemente des kartesischen Produkts

$$|\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdots |\Omega_n|,$$

denn es gibt $|\Omega_i|$ mögliche Wahl für die i -te Komponente eines n -Tupels, und diese Wahlen sind unabhängig voneinander (also nehmen wir das Produkt dieser Zahlen).

Im Spezialfall $|\Omega_1| = |\Omega_2| = \cdots = |\Omega_n| = k$ erhalten wir, dass die Mächtigkeit des Produkts k^n ist.

Im obigen Beispiel gilt $|\Omega| = 6$, also $|\Omega \times \Omega| = 6^2 = 36$.

Kartesisches Produkt

Diese Konstruktion kann in solchen Fällen verwendet werden, wenn man unabhängige zufällige Ereignisse zusammen behandeln und mit einer Ergebnismenge beschreiben möchte.

Beispiel. Eine Münze wird fünfmal nacheinander geworfen.

- Das Ergebnis eines Wurfes beeinflusst die nachfolgenden Würfe nicht, bei jedem Wurf erhält man einen Kopf und eine Zahl ungefähr in der Hälfte der Fällen (wenn das Experiment vielmal wiederholt wird).

⇒ Eine fixe Kopf-Zahl Folge ergibt sich ungefähr mit relativer Häufigkeit $(1/2)^5 = 1/32$.

Kartesisches Produkt

Beispiel. Eine Münze wird fünfmal nacheinander geworfen.

- Sei $\Omega = \{K, Z\}$. Eine Folge von fünf Würfeln kann durch eine $K - Z$ Folge der Länge 5, also durch die Elemente der Produktmenge

$$\Omega' := \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$$

beschrieben werden.

- Wie es oben erklärt war, jede Folge sollte sich mit Wahrscheinlichkeit $(1/2)^5 = 1/32$ als Ergebnis ergeben.
- Die Mächtigkeit der Produktmenge Ω' ist $|\Omega|^5 = 2^5 = 32$, also haben wir einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum erhalten.

Kartesisches Produkt

Beispiel. Ein (sechs seitiger) Würfel wird sechsmal geworfen. Die Ergebnisse sind dann Folge der Länge 6, deren Glieder ganze Zahlen zwischen 1 und 6 sind.

- Wie im obigen Beispiel, die Ergebnismenge ist das sechsmalige Produkt der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit selbst.
- Sei V das Ereignis, dass alle (sechs) Würfe verschieden sind. Ein 6-Tupel in V enthält die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, und jede von diesen genau einmal, d.h., es ist eine Anordnung dieser Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge, anders gesagt, eine *Permutation* der Zahlen.

Permutation

Definition. Unter einer *Permutation* von n Elementen versteht man eine Anordnung von ihnen in einer bestimmten Reihenfolge.

Kartesisches Produkt

Wir bestimmen die Anzahl der Elementen von V . Wie viele Reihenfolge können 6 Elementen haben?

- Am ersten Platz können 6 verschiedene Elemente stehen.
- Wenn das erste Element schon ausgewählt wurde, dann hat man nur 5 Möglichkeiten für das zweite Element, und danach hat man am dritten Platz nur 4 Möglichkeiten, usw.
- Insgesamt gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 = 6!$ ("6 Fakultät" - faktoriális) Möglichkeiten, d.h.

$$\mathbb{P}(V) = \frac{720}{6^6} = \frac{5}{324} \approx 0,0154,$$

also ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 6 verschiedene Zahlen würfelt, nur 1,54%.

Kartesisches Produkt

Die obige Argumentation kann im Allgemeinen für n Elemente durchgeführt werden, also ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (n \text{ Fakultät}).$$

Urnenmodelle

- Es gibt viele Situationen, wenn ein zufälliges Ereignis so interpretiert werden kann, als eine zufällige Wahl von Elementen aus einer Menge.
- Zum Beispiel: Ziehung aus einem Spielkartenpaket, Lottoziehung.
- Diese Ereignisse können typisch durch einem Urnenmodell beschrieben werden: in einer Urne gibt es n Bälle gleiches Gewichts und gleicher Gestalt, die mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ nummeriert und vermischt wurden. Die zufällige Wahl wird dann als eine blinde Ziehung von Bällen interpretiert, wo man zwischen den Bällen nicht unterscheiden kann.

1. Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- In diesem Fall wird der gezogene Ball in die Urne zurückgelegt (die Bälle werden vor dem nächsten Ziehen in der Urne vermischt), und die Reihenfolge der gezogenen Bälle wird beachtet.
- Die Ergebnisse können als Sequenzen der Länge k interpretiert werden, deren Glieder ganze Zahlen zwischen 1 und n sind. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist dann n^k .
- Also ist die Ergebnismenge das k -malige kartesische Produkt der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit selbst.
- Wir nehmen an, dass jeder Ball bei jeder Ziehung mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird (denn die Bälle werden nach jeder Ziehung wieder vermischt), also ergibt sich jedes Ergebnis mit Wahrscheinlichkeit $1/n^k$.

Urnenmodelle

1. Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- Wir sahen analogische Situationen schon früher.
- Ein Wurf einer Münze entspricht einem Experiment, wenn man aus zwei Bällen blind zieht. Also entspricht k unabhängige Würfe einer Münze k zufälliger Ziehung (mit Zurücklegen) aus einer Urne, die zwei Bällen enthält.
- Ein Wurf mit einem Würfel entspricht einem Experiment, wenn man aus sechs Bällen blind zieht, mehrmalige Würfe entsprechen mehrmaligen Ziehungen.
- Die Wahrscheinlichkeitsräume in den Urnenmodellen und den früheren Beispielen sind zwar nicht identisch (die Ergebnismengen sind verschieden), aber die Anzahl der Elemente und die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignissen sind gleich, also sind die entsprechenden Modellen für die Wahrscheinlichkeitstheorie äquivalent.

2. Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

- In diesem Fall zieht man k aus n Bällen ($1 \leq k \leq n$), aber die gezogenen Bälle werden nicht zurückgelegt, und die Reihenfolge wird berücksichtigt.
- Die Ergebnisse werden durch Sequenzen der Länge k beschrieben, deren Glieder *verschiedene* ganze Zahlen zwischen 1 und n sind.
- Die einzelnen Sequenzen haben gleiche Wahrscheinlichkeiten: wäre nämlich eine Sequenz wahrscheinlicher als die anderen, so würden wir durch Umnummerierung der Bälle diese Behauptung für eine beliebige Sequenz erhalten. Also bekommt man auch in diesem Fall einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum.

2. Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Anzahl der Ergebnisse: beim ersten Ziehen wählen wir aus n verschiedenen Bällen, falls der erste gezogene Ball schon fix ist, dann gibt es $n - 1$ Möglichkeiten beim zweiten Ziehen, und ähnlicherweise, beim k -ten Ziehen gibt es $n - k + 1$ Möglichkeiten, das gibt insgesamt

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

mögliche Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{(n-k)!}{n!}$.

Urnenmodelle

Definition. Eine *Variation ohne Wiederholung* (ismétlés nélküli variáció) ist eine Auswahl von k verschiedenen Objekten aus einer Menge von n Objekten ($1 \leq k \leq n$), wobei die Reihenfolge der Auswahl berücksichtigt wird. Die Anzahl der verschiedenen solchen Auswahlen ist $n!/(n - k)!$.

Bemerkung. Der Fall $k = n$ entspricht der Permutation von n Elementen. Die obige Formel für die Anzahl der Variationen hat hier die Gestalt $n!/(n - n)! = n!/0!$.

Damit diese und viele andere Formeln sinnvoll sind, *definiert* man

$$0! := 1.$$

Urnenmodelle

”Ohne Wiederholung” bedeutet im obigen Definition, dass die ausgewählten Objekte verschieden sind.

Im ersten Urnenmodell betrachteten wir Auswahlen *mit* Wiederholung:

Definition. Eine *Variation mit Wiederholung* (ismétléses variáció) ist eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Objekten, wobei die Reihenfolge der Auswahl berücksichtigt wird und die Objekte mehrmals ausgewählt werden können. Die Anzahl der verschiedenen solchen Auswahlen ist n^k .

3. Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

- In diesem Fall ziehen wir k Bälle aus einer Menge von n Bällen, die gezogenen Bälle werden nicht zurückgelegt (folglich sind sie verschieden), aber nur die Menge der gezogenen Bälle (und *nicht* die Reihenfolge der Ziehungen) wird berücksichtigt.
- Beispiel: Lottoziehung.
- Jedes Ergebnis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit: wäre nämlich eine Menge von k gezogenen Bällen wahrscheinlicher als die anderen, so würden wir durch Umnummerierung der Bälle diese Behauptung für eine beliebige Menge erhalten. Also bekommt man einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum.

Defintion. Eine *Kombination ohne Wiederholung* (ismétlés nélküli kombináció) ist eine Auswahl von k verschiedenen Objekten aus einer gegebenen Menge von n Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Wahlen.

Die Anzahl der Kombinationen = die Anzahl der k -elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$.

Urnenmodelle

- Um diese Zahl zu bestimmen, berücksichtigen wir zunächst die Reihenfolge, in der die k Elemente der Teilmenge gewählt wurde.
 - Es gibt $n!/(n - k)!$ Sequenzen der Länge k mit verschiedenen Gliedern, die aus n Elementen gewählt werden.
 - Wie viel Sequenzen gibt es, für die die *Menge* der k Glieder (ohne Reihenfolge) fix ist?
 - Aus k verschiedenen Elementen kann man $k!$ verschiedene Sequenzen bilden, also wurde jede k -elementige Teilmenge der Grundmenge zwischen diesen Sequenzen $k!$ -mal repräsentiert.
- ⇒ Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad ({}^{\text{„}n \text{ über } k\text{“}},$$

also erhält man eine zufällig gewählte k -elementige Teilmenge mit Wahrscheinlichkeit $1/\binom{n}{k}$.

Urnenmodelle

- Die obige Zahl ist ein sogenannte *Binomialkoeffizient*.
- Seine einfachen Eigenschaften ($0 \leq k \leq n$):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

- Der Name kommt aus dem *binomischen Lehrsatz*:

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \end{aligned}$$

wo x und y beliebige reelle Zahlen und n eine positive ganze Zahl sind.

Urnenmodelle

Eine Folgerung des binomischen Lehrsatzes: mit der Wahl $x = y = 1$ erhält man

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Beispiel. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle gezogenen Zahlen im "Ötöslottó" gerade sind?

- Im "Ötöslottó" zieht man 5 Zahlen aus 90, also ist die Anzahl der möglichen Ziehungen (d.h. $|\Omega|$) $\binom{90}{5}$.
- Sei G das Ereignis, dass alle gezogenen Zahlen gerade sind.
- Wie viele Ergebnisse bilden G ? Für ein solches Ereignis, die gezogenen Zahlen wurden aus der Menge der geraden Zahlen zwischen 1 und 90 ausgezogen. Es gibt 45 solche Zahlen, also hat man $\binom{45}{5}$ solche Ergebnisse.
- D.h.

$$\mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{287}{10324} \approx 0,0278.$$

4. Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Kommt später.

Welches Modell sollten wir wählen?

- In vielen Situationen folgt die Wahl logisch.
- Z.B.: Lottoziehung → Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- Es gibt auch solche Fälle, wo das Modell nicht so eindeutig ist.

Beispiel. In einer Urne gibt es zwei gelbe und zwei rote Bälle. Wir ziehen zwei Bälle ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir zwei Bälle verschiedener Farben?

1. Lösung: ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

- Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ mögliche Wahlen von 2 Bällen aus 4, also gilt $|\Omega| = 6$.
- Um zwei Bälle verschiedener Farbe zu ziehen, muss man einen Ball aus den roten, und unabhängig einen Ball aus den gelben Bällen ziehen. Das gibt $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten.
- Also ist die Wahrscheinlichkeit $4/6 = 2/3$.

Beispiel. In einer Urne gibt es zwei gelbe und zwei rote Bälle. Wir ziehen zwei Bälle ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir zwei Bälle verschiedener Farben?

2. Lösung: mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

- Jetzt gibt es $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Ergebnisse, also gilt $|\Omega| = 12$.
- Um zwei Bälle verschiedener Farbe zu ziehen, muss man zunächst einen roten und danach einen gelben Ball oder zuerts einen gelben und danach einen roten Ball ziehen. In beiden Fällen haben wir $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, also gibt es insgesamt 8 Ergebnisse, wo das obige Ereignis eintritt.
- Folglich ist die Wahrscheinlichkeit $8/12 = 2/3$.

Urnenmodelle

- Im obigen Beispiel war es nicht gegeben, ob die Reihenfolge berücksichtigt wird, und die Lösungen gaben gleiche Wahrscheinlichkeiten.
- Im Allgemeinen: falls das betrachtete Ereignis anhand der in den Modellen zur Verfügung stehenden Ergebnisse beschrieben werden kann, so ist es egal, welches Modell benutzt wird. (Warum?)
- Es gibt solche Fälle, wenn man nur ein der zwei Modelle benutzen kann, einfach weil das betrachtete Ereignis nicht in beiden Modellen beschrieben werden kann.
- Z.B.: das Ereignis, das man zunächst einen gelben und danach einen roten Ball zieht, kann nur dann behandelt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird.

4. Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

- Man wählt k Elementen aus einer n -elementigen Menge, die Reihenfolge wird nicht berücksichtigt.
 - Die Ergebnisse sind hier *Multimenge*: die Elemente können mehrmals auftreten.
 - Problem: im Modell sollten nicht alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben: z.B. falls der Grundmenge $\{1, \dots, n\}$ ist, dann sollte das Ergebnis $\{1, 2, \dots, k\}$ wahrscheinlicher als $\{1, \dots, 1\}$ (k -mal 1) sein. (Warum?)
- ⇒ Die Ergebnisse bilden keinen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum.

4. Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

- Später wird der Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums verallgemeinert, aber es gibt eine andere naheliegende Lösung: man kann das erste Urnenmodell benutzen (siehe Ziehen mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge).
- In diesem Modell können Multimenge als Ereignisse interpretiert werden.

Beispiel.

- Ein Würfel wird fünfmal geworfen, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die geworfene Augenzahlen (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) 1, 1, 2, 2, 3 sind?
- Dieses Ereignis A wird durch die Multimenge $\{1, 1, 2, 2, 3\}$ interpretiert.
- Um die Wahrscheinlichkeit von A zu bestimmen, sollen wir die Anzahl der Folgen mit den obigen Elementen bestimmen.

Definition. Eine *Permutation mit Wiederholung* (ismétléses permutáció) bezeichnet eine Anordnung von Objekten, bei denen manche Objekte identisch sind.

Anzahl der Permutationen.

Nehmen wir an, dass wir die folgende Zahlen anordnen möchten:

k_1 -mal die Zahl n_1 , k_2 -mal $n_2, \dots, k_m$ -mal n_m .

- Wir haben insgesamt $n = k_1 + \dots + k_m$ Elementen.
- Wenn wir jetzt zwischen den Elementen unterscheiden, so bekommen wir $n!$ verschiedene Permutationen.
- Zwei von diesen geben die gleiche Anordnung, falls die Stellen der Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_m$ gleich sind.
- Wenn die Stellen diesen Zahlen fix gehalten werden, dann erhält man $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!$ Permutationen, die die Gleiche Anordnung geben.

⇒ Die Anzahl der Andordnungen: $\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}$.

Urnenmodelle

Folglich gilt in unserem beispiel:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 2!}}{6^5} = \frac{5}{1296}.$$

Übung. Wie viele verschiedene k -elementige Multiteilmenge hat eine n -elementige Menge?

Die obige Übung führt zum Begriff der **Kombination mit Wiederholung**, die hier nicht betrachtet wird.