14. Übungsblatt

Konfidenzintervalle, Hypothesentests

1. Die Körpergröße von BME-Studentinnen wird durch unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ modelliert. 101 (paarweise verschiedene) BME-Sudentinnen wurden zufällig gewählt. Das empirische Mittel der aus ihren Höhendaten bestehenden Stichprobe ist 167 cm, während die empirische Standarabweichung dieser Stichprobenwerten 4 cm ist. Geben wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95%

   a) für μ an, falls $\sigma = 5$ cm, b*) für σ^2 an, falls μ unbekannt ist, c) für μ an, falls σ^2 unbekannt ist.

2. Die Temperatur eines Warmwasserbeckens im Széchenyi Bad wird eine Woche lang täglich gemessen, und die folgenden Ergebnisse werden erhalten (gemessen in Grad Celsius): 36,2; 37,8; 36,3; 37,7; 37,6; 37,0; 36,4. Nehmen wir an, dass die Temperatur des Wasserbeckens normalverteilt ist, und dass die einzelnen täglichen Messwerten unabhängig sind. Geben wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 90% für den Erwartungswert der Temperatur des Wasserbeckens.

---

3. In der letzten Zeit erfahren wir, dass unser Smartphone die Applikationen sehr oft aktualisiert. Laut unserem Freund, der in der R&D-Abteilung des Smartphone-Herstellers arbeitet, aktualisiert das Smartphone im Durchschnitt höchstens 2 Applikationen pro Tag. Die Anzahl der in den einzelnen Tagen aktualisierten Applikationen wurde an 8 aufeinander folgenden Tagen notiert, und wir erhielten die folgenden Zahlen: $1, 4, 3, 6, 2, 1, 5, 2$. Angenommen, das diese Werte unabhängig sind und eine Normalverteilung mit unbekannter Standardabweichung folgen, wir möchten anhand eines Tests mit Fehlerniveau 5% entscheiden, ob die Behauptung unseres Freundes wahr ist.

   (a) Stellen wir eine der Situation entsprechende Nullhypothese H_0 und die zugehörige Alternativhypothese H_1 auf.

   (b) Für welche Werte der Teststatistik wird H_0 angenommen?

   (c) Berechnen wir den Wert der Teststatistik und entscheiden wir, ob H_0 (aufgrund des Ergebnisses) angenommen oder verworfen werden muss.

   (d) Wie ändert sich die Situation, wenn es angenommen wird, dass die Standardabweichung der Verteilung 2 ist?

4. In den Wohnzimmern der 10 Wohnungen eines Altbaus sind die handgefertigten Fenster offiziell 1 Meter breit. Die Breite der Fenster wurden gemessen, und die folgenden Ergebnisse (in Meter angegeben) wurden (in dieser Reihenfolge) erhalten: 0,97; 1,01; 1,00; 0,98; 0,99; 0,95; 1,03; 1,00; 0,99; 0,98. Führen wir einen Test mit Fehlerniveau 5% durch, um zu entscheiden, ob der Erwartungswert der Breite der Fenster als 1 Meter betrachtet werden kann, wenn wir annehmen, dass die Breite unabhängig und normalverteilt (a) mit Standardabweichung 2 cm, (b) mit unbekannter Standardabweichung sind.

   Geben wir H_0, H_1, den Annahmebereich (also die Werte der Teststatistik, für die H_0 angenommen wird), die Teststatistik und das Ergebnis des Tests in beiden Fällen an.

5. Laut einem Stammkunden eines Schnellbüfetts sind die Flammkuchen in der letzten Zeit kleiner als früher. Nach dem Eigentümer des Büfetts ist das Gewicht ihrer Flammkuchen im Erwartungswert 20 dkg, deshalb maß der Stammgast das Gewicht der im Büfett gekauften Flammkuchen 10 Mal. Das empirische Mittel der Daten ist 18 dkg, und für die empirische Standardabweichung ergibt sich der Wert 1 dkg. Angenommen, dass das Gewicht der Flammkuchen normalverteilt ist, und die Messungen unabhängig war, konstruieren wir einen Hypothesentest zum Fehlerniveau 5%, um zu entscheiden, ob der Erwartungswert des Gewichts der Flammkuchen 20 dkg erreicht.

   (a) Stellen wir eine der Situation entsprechende Nullhypothese H_0 auf, und geben wir die Alternativhypothese auch an.

   (b) Für welche Werte der Teststatistik wird H_0 angenommen?

   (c) Berechnen wir den Wert der Teststatistik und entscheiden wir, ob H_0 (aufgrund des Ergebnisses) angenommen oder verworfen werden muss.

6. Seien $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ Stichproben, wo $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_1^2)$ und $Y_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_2^2)$ gelten (also sind die Erwartungswerte der Verteilungen gleich).

   (a) Zeigen wir, dass die Variable $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$ standardnormalverteilt ist.

   *(b) Zeigen wir, dass falls auch $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt, dann

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)(S_X^*)^2 + (m-1)(S_Y^*)^2}{n+m-2}}} \cdot \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sim t(n+m-2).$$

7. 10 (männliche) Studenten der BME, die Maschinenbau studieren, wurden zufällig ausgewählt. Ihre durchschnittliche Höhe ist 179 cm mit empirischer Standardabweichung 2 cm. Das Experiment wurde mit 20 Bauingenieur-Studenten wiederholt, in diesem Fall ergab sich der Wert 178 cm für den Durchschnitt mit empirischer Standardabweichung 1 cm. Angenommen, dass die Körpergrößen der einzelnen Studenten unabhängig, normalverteilt und bei gleichem Fach identisch verteilt sind, führen wir Tests mit Fehlerniveaus 5% und 1% durch, um zu entscheiden, ob die Erwartungswerte der Körpergröße der Studenten bei den zwei Fächern gleich sind,

   (a) falls die Standardabweichung der Körpergröße bei den (männlichen) Maschinenbauingenieur-Studenten $\sqrt{2}$ cm, und bei den (männlichen) Bauingenieur-Studenten 1 cm ist.

   (b) falls die Standardabweichungen der Körpergrößen der Studenten beider Fächer unbekannt, aber gleich sind.

   Geben wir H_0, H_1, den Annahmebereich der Teststatistik (also die Werte, für die H_0 angenommen wird), den Wert der Teststatistik und die Entscheidung in beiden Fällen an.

Werte der Verteilungsfunktion der Standardnomalverteilung

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Formelsammlung - Konfidenzintervalle und Hypothesentests

$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x_n}^2$, $(s_n^*)^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_n})^2$, $s_n^* = \sqrt{(s_n^*)^2}$.

u-Tests

(a) Zweiseitiger u-Test für eine Stichprobe: $u = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $\quad u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$,
Konfidenzintervall für μ bei bekannter σ:

$$\left[\overline{x_n} - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}\right].$$

(b) Einseitiger u-Test für eine Stichprobe: $u = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $\quad u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$.

(c) Zweiseitiger u-Test für zwei Stichproben: $u = \frac{\overline{x_{n_1}} - \overline{y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, $\quad u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$.

t-Tests

(a) Zweiseitiger t-Test für eine Stichprobe: $t = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}$
$t_{n-1,\varepsilon/2}$ ist das $(1-\varepsilon/2)$-Quantil der $t(n-1)$-Verteilung,

Konfidenzintervall für μ bei unbekannter σ:

$$\left[\overline{x_n} - \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}\right].$$

(b) Einseitiger t-Test für eine Stichprobe: $t = \frac{\overline{x_n}-\mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}$,
$t_{n-1,\varepsilon}$ ist das $(1-\varepsilon)$-Quantil der $t(n-1)$-Verteilung,

(c) Zweiseitiger t-Test für zwei Stichproben: $t = \frac{\overline{x_{n_1}}-\overline{y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)(s_x^*)^2+(n_2-1)(s_y^*)^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$,
$t_{n_1+n_2-2,\varepsilon/2}$ ist das $(1-\varepsilon/2)$-Quantil der $t(n_1+n_2-2)$-Verteilung,

Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem μ (ergänzendes Material, kein Prüfungsmaterial im Herbstemester 2024/25)

$$\left[\frac{(n-1)(s_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,\varepsilon/2}}, \frac{(n-1)(s_n^*)^2}{\chi^2_{n-1,1-\varepsilon/2}}\right],$$

wo $\chi^2_{n-1,\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung $\chi^2(n-1)$.

Kritische Werte des t-Tests

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
1	6,314	12,71	31,82
2	2,920	4,303	6,965
3	2,353	3,182	4,541
4	2,132	2,776	3,747
5	2,015	2,571	3,365
6	1,943	2,447	3,143
7	1,895	2,365	2,998
8	1,860	2,306	2,896
9	1,833	2,262	2,821
10	1,812	2,228	2,764
11	1,796	2,201	2,718
12	1,782	2,179	2,681
13	1,771	2,160	2,650
14	1,761	2,145	2,624
15	1,753	2,131	2,602
16	1,746	2,120	2,583
17	1,740	2,110	2,567
18	1,734	2,101	2,552
19	1,729	2,093	2,539
20	1,725	2,086	2,528

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
21	1,721	2,080	2,518
22	1,717	2,074	2,508
23	1,714	2,069	2,500
24	1,711	2,064	2,492
25	1,708	2,060	2,485
26	1,706	2,056	2,479
27	1,703	2,052	2,473
28	1,701	2,048	2,467
29	1,699	2,045	2,462
30	1,697	2,042	2,457
40	1,684	2,021	2,423
50	1,676	2,009	2,403
60	1,671	2,000	2,390
70	1,667	1,994	2,381
80	1,664	1,990	2,374
90	1,662	1,987	2,369
100	1,660	1,984	2,364
200	1,653	1,972	2,345
500	1,648	1,965	2,334
∞	1,645	1,960	2,326

f ist der Freiheitsgrad der Verteilung, oberhalb der Spalten wurde das Fehlerniveau des Tests angegeben, der obere Wert bezieht sich auf einen zweiseitigen, der untere auf einen einseitigen Test.

Einige Quantile der χ^2-Verteilung zur Aufgabe 14.1. *b)

f	$\chi^2_{f,0.975}$	$\chi^2_{f,0.95}$	$\chi^2_{f,0.05}$	$\chi^2_{f,0.025}$
100	74.2219	77.9295	124.3421	129.5612
101	75.0835	78.8132	125.4584	130.6997
102	75.9457	79.6975	126.5741	131.8375