12. Übungsblatt

Bedingte Wahrscheinlichkeit im stetigen Fall, mehrdimensionale Normalverteilung

1. Zwei Spieler spielen das folgende Spiel: eine (nicht unbedingt reguläre) Münze wird viermal geworfen (wir nehmen an, dass die Würfe unabhängig sind), und der erste Spieler gewinnt genau dann, falls es kein Paar von 2 nacheinander geworfene "Köpfe" gibt. Sonst gewinnt der zweite Spieler.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Spieler gewinnt, falls eine "Zahl" mit Wahrscheinlichkeit p geworfen wird?

   (b) Der zweite Spieler versuchte, die Münze zu zinken. Der Versuch war aber nicht erfolgreich, und deshalb ist die Wahrscheinlichkeit der "Zahl" eine zufällige Quantität, die mit U bezeichnet wird. Nehmen wir an, dass U uniform verteilt auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$ ist. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Spieler gewinnt.

   (c) Berechnen wir diese Wahrscheinlichkeit, falls die Verteilung von U durch die Dichtefunktion

   $$f_U(t) = \begin{cases} 6t - 6t^2, & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   angegeben ist.

2. Sei $Y \sim U(0;1)$, und sei X uniformverteilt auf dem Intervall $[Y^2; Y]$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 0{,}5)$.

3. Sei $X \sim U(0;1)$ eine uniformverteilte Zufallsvariable, und sei noch Y eine Zufallsvariable, die unter der Bedingung $X = \lambda$ exponetialverteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von Y.

4. Sei $X \sim U(0;1)$ eine uniformverteilte Zufallsvariable, und sei Y ein Zufallsvariable, die unter die Bedingung $X = \lambda$ Poisson-verteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen wir die Verteilung und den Erwartungswert von Y.

5. Eine Firma sucht nach Sicherheitsfehlern regelmäßig in ihren Applikationen. Nehmen wir an, dass die Verteilung der Zeit T bis zur Entdeckung eines speziellen Sicherheitsfehlers in einer Applikation durch die Verteilungsfunktion

   $$F_T : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{falls } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   angegeben ist. Wenn der Fehler im Zeitpunkt t entdeckt wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er von Hackern früher entdeckt wurde, durch die Formel $1 - e^{-t}$ angegeben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Firma dieser Fehler in einer Applikation früher entdeckt, als die Hacker?

---

6. Seien X und Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen, und seien noch $U = 3X - 2Y + 1$ und $V = 7X - 5Y - 3$.
   a) Bestimmen wir die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(X, Y)^T$.
   b) Bestimmen wir die Parameter der Verteilung des Zufallsvektors $(U, V)^T$.
   c) Geben wir die Dichtefunktion von $(U, V)^T$ an.
   d) Berechnen wir $\mathrm{cov}(-2U + V, 12U - 5V)$.
   e) Sind $-2U + V$ és $12U - 5V$ unabhängig?

7. Sei $(X,Y)^T \sim N(\underline{\mu},\Sigma)$ ein zweidimensionaler normalverteilter Zufallsvektor, wo

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 2)$.

   (b) Seien noch $W = X - 2Y + 5$ und $Z = 3X + Y - 2$. Bestimmen wir den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(W,Z)^T$.

8. Sei $(X,Y)^T$ ein zweidimensionaler standardnormalverteilter Zufallsvektor. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Länge des Vektors $(X,Y)^T$ höchstens 1 ist?

9. Sei $\underline{Z} \sim N(\underline{\mu};\Sigma)$ wo

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Geben wir eine untere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ an, für die $A \cdot \underline{Z} + \underline{v}$ (zweidimensional) standardnormaiverteilt ist.

10. Sei $\underline{Z} \sim N(\underline{\mu};\Sigma)$ ein zweidimenasionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{Z_1,Z_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-5(t_1+1)^2+7(t_1+1)(t_2+2)-\frac{5}{2}(t_2+2)^2} \qquad (t_1,t_2 \in \mathbb{R})$$

   ist. Bestimmen wir die Parameter $\underline{\mu}$ und Σ.

11. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors $(X,Y)^T$ ist

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} + \frac{1}{2\pi e} st & \text{falls } s,t \in (-1,1), \\ \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   a) Geben wir die Randverteilungen an.
   b) Ist $(X,Y)^T$ ein zweidimensionaler normalverteilter Zufallsvektor?

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$		$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	Bin$(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	Poi(λ)	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	Geo(p)	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	U$(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	Exp(λ)	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ $(0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	N$(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim. Normalverteilung	N$(\underline{\mu};\Sigma)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det\Sigma}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\Sigma^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	Σ