11. Übungsblatt

Bedingter Erwartungswert, Satz vom totalen Erwartungswert

1. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Seien X die kleinste und Y die größte Augenzahl. Bestimmen wir den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(X \mid Y = 3)$.
2. Eine Münze wird viermal geworfen. Sei Y die Anzahl der Köpfe, und sei A das Ereignis, dass wir erst beim zweiten Wurf einen Kopf werfen. Bestimmen wir den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y \mid A)$.
3. Ein Würfel wird n -mal geworfen. Seien X die Anzahl der Sechsen, Y die Anzahl der geraden Augenzahlen. Bestimmen wir die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$. (Siehe auch Aufgabe 12 auf dem 10. Übungsblatt.)
4. Seien X und Y die in Aufgabe 17 des 10. Übungsblatts definierten Variablen. Bestimmen wir $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

5. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y} : (s, t) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(s^2 - st + t^2) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Bestimmen wir

- a) die bedingte Dichtefunktion $f_{Y|X}(t \mid s)$, b) die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$,
 - c) die lineare Regression von Y auf X .
6. Eine Zahl U wird uniform zufällig auf dem Intervall $[1; 2]$ gewählt. Sei noch M eine exponentialverteilte Wartezeit mit Parameter U .
- a) Bestimmen wir $\mathbb{E}(M \mid U)$. b) Berechnen wir die Dichtefunktion des Zufallsvektors (U, M) .
7. Seien $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim \text{Exp}(2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Berechnen wir
- a) $\mathbb{E}(3X - Y + 1 \mid X)$, b) $\mathbb{E}((2XY)^2 - 7Y \mid X)$,
 - c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 \mid X + Y)$, d) $\mathbb{E}(X^2 \text{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y \mid Y)$.
8. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y} : (s, t) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(s + t + st) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Bestimmen wir die Regression $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

9. Wir suchen nach einem Papier in die Schubladen eines Schreibtisches. Es ist in der oberen Schublade mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und in der unteren Schublade mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Die Durchsicht der oberen Schublade dauert 7 Minuten, und die Durchsicht der unteren Schublade dauert 3 Minuten. Nehmen wir an, dass wir das Papier nur nach der kompletten Durchsicht der richtigen Schublade finden können. Wie lange dauert die Durchsicht im Durchschnitt, wenn wir
- a) mit der oberen Schublade anfangen? b) mit der unteren Schublade anfangen?
10. Es gibt N Zettel in einem Hut, auf denen die Zahlen $1, 2, \dots, N$ geschrieben wurden (auf jedem Zettel wurde genau eine Zahl geschrieben, und jede Zahl $1, \dots, N$ wurde genau einmal aufgeschrieben). Wir ziehen zwei Zettel aus dem Hut zufällig ohne Zurücklegen, und dann dividieren wir die kleinere gezogene Zahl durch die größere.
- a) Was ist der Erwartungswert des somit erhaltenen Ergebnisses, wenn wir wissen, dass die Zahl N gezogen wurde?
 - b) Bestimmen wir den Erwartungswert des erhaltenen Ergebnisses (ohne weitere Annahmen).
11. Beim Wurf einer Münze bekommen wir einen Kopf mit Wahrscheinlichkeit p , wo p ein uniform zufällig auf dem Intervall $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ gewählte Zahl ist. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Würfe, wenn wir die Würfe bis zum ersten Kopf wiederholen.

12. Sei $X \sim \text{Exp}(4)$ eine Zufallsvariable. Nach der Evaluation von X wählen wir eine Zahl Y zufällig auf dem Intervall $(0; X)$. Berechnen wir $\mathbb{E}(Y)$.
-

13. Zwei reguläre Würfel wird (gleichzeitig) geworfen. Die Würfel, die eine Sechs geben, legen wir beiseite, und wiederholen wir den Prozess mit den übrigen Würfeln, bis beide Würfel beiseitegelegt werden. Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Würfe?

14. Ein Mann verirrt sich in einer Mine und steht an einer Kreuzung, von der aus er in drei Richtungen weitergehen kann. Wenn er die erste Richtung wählt, verlässt er die Mine in einer Stunde, falls er die zweite Richtung wählt, dann kehrt er in 2 Stunden zu seinem Ausgangspunkt zurück, und wenn er die dritte Richtung wählt, gelangt er in 3 Stunden zum selben Ort zurück. Nehmen wir an, dass er in jedem Fall, wenn er eine Wahl treffen muss, mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Optionen wählt. Wie lange dauert es ihm voraussichtlich, die Mine zu verlassen?

15. Bei einem Brettspiel entscheidet man, wie viele Schritte man mit der Figur macht, indem man einen regulären Würfel würfelt. Ein:e Spieler:in würfelt nacheinander so lange, bis eine von Sechs verschiedene Augenzahl geworfen wird, und die Anzahl der Schritte, die der:die Spieler:in mit der Figur macht, ist die Summe der geworfenen Zahlen. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Schritte, die ein:e Spieler:in in einem Rund macht.

16. Viele Menschen wetteifern um die Hand der schönen Prinzessin. Da sie sehr beschäftigt ist, bittet sie ihre Dienstfrau, alle Date-Einladungen zu behandeln. Die Dienstfrau soll jede Einladung (unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit 56,25% in ihrem Namen annehmen.

Der beharrliche Herzog entscheidet, dass er die Prinzessin jeden Tag zu einem Rendezvous einlädt, bis sie ja sagt. Da er die Regeln der Prinzessin nicht kennt, bringt er ihr Rosen jeden Tag, um sie positiv zu beeinflussen. Am ersten Tag bringt er eine Rose, und an jedem weiteren Tag doppelt so viel wie am vorigen Tag. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Rosen, die die Prinzessin insgesamt vom Herzog bekommt.

- *17. Benutzen wir den Satz vom totalen Erwartungswert, um Teil b) von Aufgabe 15 auf Übungsblatt 3 zu lösen.

- *18. k Joker wurden einem französischen Spielkartenpaket (mit 52 Karten) hinzugefügt. Nach der Vermischung des so erhaltenen Pakets ziehen wir einige Karten von oben vom Stapel, bis wir ein Joker bekommen. Was ist der Erwartungswert der Anzahl der gezogenen Karten? Was ist dieser Erwartungswert, wenn wir bis zum l -ten Joker ziehen ($1 \leq l \leq k$)?

- *19. a) Stephan Schwindler verdient sein Brot mit Würfelspielen. Heute bietet er das nächste Spiel den Passanten auf der Straße. Der Spieler würfelt mit einem regulären sechsseitigen Würfel, und falls er eine Sechs würfelt, zahlt ihm Stephan ("2000 Forint pro Punkt", also insgesamt) 12 000 Forint und das Spiel endet. Andernfalls zahlt der Spieler Stephan in ähnlicher Weise, ist das Ergebnis nämlich $1 \leq k \leq 5$, so bekommt Stephan $k \cdot 1\,000$ Forint und das Spiel läuft weiter, also würfelt der Spieler immer wieder nach den obigen Regeln bis zur ersten Sechs, wenn das Spiel endet. Was ist der Erwartungswert von Stephans Profit pro Spiel? (Der Profit pro Spiel ist die Differenz zwischen Stephans Einnahmen und Ausgaben in einem Spiel, die auch ein negativer Wert sein kann.)

b) Es ging Stephan in letzter Zeit nicht besonders gut, deshalb entschied er, seinen gezinkten Würfel einzusetzen, um seinen Profit zu steigern. Damit der Trick nicht auffällig ist, wurde der gezinkte Würfel mit 9 anderen regulären Würfeln gemischt, die äußerlich identisch aussehen und auch zum gezinkten Würfel passen. Beim gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit einer Sechs $\frac{1}{6} - p$, und die Wahrscheinlichkeit einer Eins ist $\frac{1}{6} + p$ für eine reelle Zahl $0 < p < \frac{1}{6}$, während alle anderen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ haben. Die Spieler wählen jetzt uniform zufällig einen aus den 10 Würfeln und spielen das Spiel mit dem gewählten Würfel nach den im Teil a) diskutierten Regeln. Bestimmen wir den Wert von p , wenn wir wissen, dass sich der Erwartungswert von Stephans Profit pro Spiel auf den Betrag von 4 600 Forint änderte.