9. Übungsblatt

Zentraler Grenzwertsatz, Tschebyschow-Ungleichung

1. a) Geben wir eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Anzahl der Köpfe nach 10 000 Würfe einer Münze zwischen 4900 und 5100 liegt. Benutzen wir den zentralen Grenzwertsatz.

   b) Geben wir eine obere Schranke für den Fehler der Approximation anhand des Satzes von Berry–Esseen.

2. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{12} \sim U(0;1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Wie kann eine normalverteilte Zufallsvariable $Y \sim N(5;4)$ durch diese Variablen approximiert werden?

3. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängige Zufallsvariablen, wo $\lambda > 0$ eine feste positive reelle Zahl ist. Schätzen wir den Wert von λ, wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{3}) = 0{,}1587$ gilt.

4. In einem Betrieb wird Bier in Flaschen gefüllt, und die Falschen werden in Kästen gestellt. Es gibt 24 Falschen in einem Bierkasten. Die Flüssigkeitsmengen in den Flaschen sind durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 5 dl und Standardabweichung 0,1 dl beschrieben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Flüssigkeitsmenge in einem Kasten höchstens 0,5 dl weniger ist, als ihr Erwartungswert.

5. Das durchschnittliche Gewicht eines Eies der Größe L ist 68 g, und die Standardabweichung des Gewichts ist 4 g. Falls es in einer Box 25 Eier gibt, was ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr Gesamtgewicht mindestens 1,65 kg ist?

6. Eine Universität organisiert einen offenen Campustag, an dem zwei Volresungen um 2 Uhr gehalten werden. Eine Registration ist zur Teilnahme notwendig. Nehmen wir an, dass 1000 Personen registrierten, und alle von ihnen am Campustag teilnehmen. Indem sie die diskutierten Themen nicht gut kennen, wählen sie zufällig mit Wahrscheinlichkeiten $1/2 - 1/2$ zwischen den Vorlesungen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich alle Gästen in den zwei Hörsaalen hinsetzen können, falls es in beiden Saalen 540 Stühle gibt?

7. Bevor einer Veranstaltung werden 1000 Einladungskarten versandt. Nach Erfahrung gehen die eingeladenen Personen zur Veranstaltung unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 0,1. Wie groß muss der Saal der Veranstaltung sein, damit sich die Gäste mindestens mit Wahrscheinlichkeit 0,9 hinsetzen können?

8. Eine Fernsehsendung besteht aus kurzen aufeinander folgenden Live-Interviews. Die Gäste werden gebeten, m Minuten zu sprechen. Nach Erfahrungen ist der Erwartungswert der Länge eines Interivews (auch) m Minuten, und ihre Standardabweichung ist 10% ihrer Erwartungswert. Wie müssen wir m bei 10 Gästen wählen, um die 100 Minuten lange Zeitdauer der Sendung höchstens mit Wahrscheinlichkeit 0,03 überzugehen?

*9. 1000 User folgen einem Online-Profil. Nehmen wir an, dass sich die Anzahl der Follower jede Woche folgenderweise ändern kann: sie wird 1,1-mal oder 0,9-mal die Anzahl der Follower in der letzten Woche, oder sie verändert sich nicht. Die Wahrscheinlichkeiten der drei vorigen Ereignisse sind gleich, also $\frac{1}{3}$. Die Veränderungen in verschiedenen Wochen sind unabhängig voneinander.

   a) Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Follower nach 104 Wochen (nach zirka 2 Jahren).

   b) Berechnen wir die (approximative) Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Follower nach 104 Wochen kleiner als 1000 wird?

---

10. Ein Datenbankserver erhält im Laufe einer Zeiteinheit durchschnittlich 50 Anfragen. Nach Erfahrungen ist die Standardabweichung der Anzahl der Anfragen 5. Schätzen wir von unten die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Anfragen während einer Zeiteinheit höher als 40 und weniger als 60 ist.

11. Zehn reguläre Würfel werden geworfen, sei X die Summe der geworfene Zahlen. Schätzen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(24 < X < 46)$ und $\mathbb{P}(31 \le X \le 37)$ anhand a) der Tschebyschow-Ungleichung und b) des zentralen Grenzwertsatzes.