8. Übungsblatt

Stetige Zufallsvektoren, Randverteilungen, Unabhängigkeit, Faltungsformeln

1. Seien $X \sim U(0;3)$ und $Y \sim U(-1;4)$ unabhängige Zufallsvariablen.
   a) $\mathbb{P}(X < Y) = ?$ b) $\mathbb{P}(X + Y = 1) = ?$ c) $\mathbb{P}(XY < 1) = ?$

2. Seien $X, Y \sim U(0;1)$ unabhängig, $Z = 2X + 1$, $V = 3Y$. $\mathbb{P}(V < Z) = ?$

3. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) ist
$$f_{X,Y} : (s,t) \mapsto \begin{cases} 2(s^3 + t^3) & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   a) $\mathbb{P}(X + Y < 1) = ?$
   b) $\mathbb{P}(X^2 < Y) = ?$
   c) Geben wir die Randverteilungen von X und Y.
   d) $\mathbb{E}(X) = ?$
   e) Sind X und Y unabhängig?
   f) Bestimmen wir $\mathbb{E}(XY)$.

4. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion
$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2s}, & \text{falls } 1 < s < 3 \text{ und } 0 < t < s, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
   wo $\alpha \in \mathbb{R}$ eine geeignete reelle Zahl ist. Bestimmen wir $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$.

5. Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\rho)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < Y)$.

6. Die Verteilungsfunktion des absolut stetigen Zufallsvektors (X, Y) ist für $0 < s < 1$ und $|t| < 1$ durch die Formel
$$F_{X,Y}(s,t) = \frac{st^3 + s}{2}$$
   definiert. Die Bildmenge von X ist das Intervall $[0,1]$, und die Bildmenge von Y ist das Intervall $[-1,1]$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zufallsvektor (X, Y) seinen Wert im Dreieck mit Ecken $A(0,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ annimmt?

7. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) ist
$$f_{X,Y} : (s,t) \mapsto \begin{cases} a(4s + t) + bst + \frac{2}{5} & \text{falls } 0 < s < 1, 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   für einige reelle Zahlen a und b. Für welche Werte von a und b sind die Variablen X und Y unabhängig?

8. Seien $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1), \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen wir die Verteilungsfunktionen der Variablen $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

*9. Seien $X, Y \sim U(0;1)$ unabhängige uniformverteilte Zufallsvariablen, und seien $V = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y)$ bzw. $W = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y)$. Zeigen wir, dass V und W unabhängig und standardnormalverteilt sind.

---

10. Seien $X, Y \sim \mathrm{Geo}(p)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen wir die Verteilung von $X + Y$.

11. Seien $X \sim \mathrm{Bin}(n;p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m;p)$ unabhängige Zufallsvariablen. Was ist die Verteilung von $X + Y$?

12. Seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; \sigma^2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen wir die Verteilung von
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

13. Sei $X \sim \chi^2(n)$, bestimmen wir die Dichtefunktion von $\sqrt{X}$.

14. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, wo $Y \sim U(0;1)$, und die Dichtefunktion von X durch

$$f_X(t) = \begin{cases} 2t & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben ist. Bestimmen wir die Dichtefunktion von $X + Y$.

15. Seien $X, Y \sim U(0;1)$ unabhängig, und sei

a) $Z = X + Y$ b) $Z = X - Y$ c) $Z = 3X - 2Y$

Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von Z.

16. Seien $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ unabhängig, und sei $Z = |X - Y|$. Bestimmen wir die Dichtefunktion von Z.