7. Übungsblatt

Normalverteilung, Satz von de Moivre–Laplace

1. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 1,2 und mit Standardabweichung 2. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 1{,}5)$, $\mathbb{P}(1{,}2 < X)$ und $\mathbb{P}(-3 < X)$.

2. Nehmen wir an, dass die Lebenszeit eines Apparats normalverteilt mit Erwartungswert 6,3 Jahre und mit Standardabweichung 2 Jahre ist.
   a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Apparat vor dem Verfall der Garantie kaputtgeht, falls die Garantie 8 Jahre lang gilt?
   b) Wie viel Jahre lang gilt die Garantie, falls die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Apparat erst nach dem Verfall der Garantie kaputtgeht, 0,95 ist?

3. Eine Maschine ist so eingestellt, dass sie 2 kg Mehl in eine Tüte dosiert. Nach Erfahrung kann es angenommen werden, dass die Quantität des Mehls in den Tüten normalverteilt mit Standardabweichung 0,002 ist, und dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Maschine in eine Tüte weniger als 2 kg Mehl dosiert, 0,01 ist. Bestimmen wir den Erwartungswert der Verteilung.

4. Der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen ist mit Wahrscheinlichkeit 0,2 kleiner als 10, und mit Wahrscheinlichkeit 0,3 größer als 14. Bestimmen wir die Parameter der Verteilung.

---

5. Die Maßeinheit der Temperatur ist in Texas Grad Fahrenheit. Nach Erfahrungen ist das Tagesmittel der Lufttemperatur im Sommer normalverteilt mit Parametern $\mu = 86$ und $\sigma = 4$. Wie ändert sich die Verteilung, wenn wir die Einheit Grad Celsius benutzen? $\left(\frac{5}{9}\left(X\,[^oF] - 32\right) \;= Y\ \,[^oC]\right)$

6. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, für die die transformierte Variable $Y = 2X + 3$ standardnormalverteilt ist. Bestimmen wir die Parameter der Verteilung von X.

7. Sei $X \sim N(m; \sigma^2)$ und $Z = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$. Bestimmen wir die Dichtefunktion von Z.

---

8. Norbert ist wählerisch: er mag im Durchschnitt nur 1 von 10 Filmen. Er schaut 300 Filme. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 42 von diesen 300 Filmen ihm gefällt.

9. Wir wissen, dass 1% eines Typs von Glühlampen fehlerbehaftet ist. Ein Geschäft hat 1000 Stücke dieses Typs gekauft. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 20 von diesen 1000 Stücken fehlerbehaftet sind?

10. 500 Studierenden besuchen eine Vorlesung. Vor der Prüfung wird eine Konsultation organisiert. Nach Erfahrung wissen wir, dass die Studierenden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit 0,25 an einer Konsultation teilnehmen. Wie groß muss der Raum sein, damit sich alle Studierenden, die an der Konsultation teilnehmen, mindestens mit Wahrscheinlichkeit 0,9 hinsetzen können?

---

*11. Zeigen wir, dass die Gleichung

$$\Phi^{(n)}(t) + t\Phi^{(n-1)}(t) + (n-2)\Phi^{(n-2)}(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt, wo $\Phi^{(n)}$ die n-te Ableitung der Verteilungsfunktion Φ ist. Benutzen wir die obige Gleichung, um die Reihendarstellung

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2^k k!(2k+1)}$$

zu beweisen.

**12. Zeigen wir, dass $\frac{t\varphi(t)}{t^2+1} < 1 - \Phi(t) < \frac{\varphi(t)}{t}$ für alle $t > 0$ gilt.

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k),\ f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$		$1-p,\ p$	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}\ (0\le t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	$N(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Standardnormalverteilungstabelle

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998