6. Übungsblatt

Stetige Zufallsvariablen, Dichtefunktion, uniforme und exponetielle Verteilungen, Erwartungswert im stetigen Fall, transformierte Zufallsvariablen

1. Betrachten wir solche Zufallsvariablen, deren Verteilungsfunktionen die unten angegebenen Funktionen sind. Entscheiden wir in jedem Fall, ob die Variable stetig ist. Geben wir auch die zugehörige Dichtefunktion an, falls sie existiert.

   a) $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0, \\ 0 & \text{ansonsten,} \end{cases}$ b) $F(t) = e^{-e^{-t}}$, c) $F(t) = \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2}$.

2. Bestimmen wir den Wert von α im unten angegbenen Beispielen, falls f eine Dichtefunktion einer Zufallsvariable ist. Geben wir auch die zugehörige Verteilungsfunktion an.

   a) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\left(2t - t^2\right) & \text{falls } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$ b) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{t-2} & \text{falls } 2 < t < 3, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$

   c) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{t-2} & \text{falls } 3 < t < 4, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$ d) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\cos\frac{t}{2} & \text{falls } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$

   *e) Betrachten wir für jede obige Funktion f eine solche Zufallsvariable X, deren Dichtefunktion die Funktion f ist. Bestimmen wir den Wert t, für den $\mathbb{P}(X < t) = 1/2$ gilt (dieser Wert ist der Median der Verteilung).

3. Betrachten wir die Zufallsvariablen, die in den Aufgaben 11-15. des fünften Übungsblatts definiert wurden. Entscheinden wir, ob diese Variablen stetig sind. Bestimmen wir die Dichtefunktion und den Erwartungswert in den stätigen Fällen.

4. Der Kraftstofftank einer Tankstelle wird jede Woche nachgefüllt. Sei X der wöchentliche Bezinverbrauch (angegeben in hunderttausend Liter), und nehmen wir an, dass die Dichtefunktion von X folgenderweise definiert ist:

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} 5\left(1-t\right)^4 & \text{falls } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

   Wie groß muss die Kapazität des Tanks sein, damit man eine Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,05 dafür hat, dass der Kraftstoff in einer Woche nicht genug ist? Wie groß ist der erwartete durchschnittliche wöchentliche Verbrauch?

5. Die Verteilung der Durchmesser eines Kraters auf dem Zwergplaneten Pluto kann mit einer Zufallsvariablen S beschrieben werden, die die folgende Dichtefunktion hat:

$$f_S : t \mapsto \begin{cases} ct^{-\frac{5}{2}} & \text{falls } t > d, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

   Hier sind c und d reelle Konstanten. Nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(S > 9) = 0{,}2689$ gilt. Bestimmen wir die Werte von c und d.

*6. Wir wählen einen Punkt P im Inkreis eines regelmäßiges Dreiecks der Seitenlänge 1 zufällig, und dann betrachten wir die Lote der Seiten des Dreiecks, die durch den Punkt P laufen, also die 3 Strecken mit einem Endpunkt P, die senkrecht auf den Seiten stehen. Seien M_1, M_2 und M_3 die anderen (also von P verschiedenen) Endpunkte dieser Strecken. Bestimmen wir den Erwartungswert der Quadratsumme $|PM_1|^2 + |PM_2|^2 + |PM_3|^2$.

---

7. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable, für die $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$ gilt.

   a) Was ist der Parameter der Verteilung von X? b) $\mathbb{P}(X < 2) =?$ c) $\mathbb{E}(X) =?$

8. Nehmen wir an, dass eine Washmaschine im Durschschnitt 2 Jahre lang ohne Fehler funktioniert, und dass der Zeitpunkt des ersten Fehlers durch eine stetige gedächtnislose Verteilung beschrieben wird. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Waschmaschine in den ersten 3 Jahren ohne Fehler funktioniert, wenn wir wissen, dass sie in den ersten 2 Jahren fehlerlos funktionierte?

9. Eine Software funktioniert fehlerbehaftet: ihr Lauf stoppt ab und zu und dann muss sie neugestartet werden. Die Laufzeit des Programms zwischen zwei Abbrüchen ist exponentialverteilt mit Parameter 1/10. Dominik startet das Programm am Ende seiner Arbeitszeit, d.h. um 16 Uhr. Wenn er die Arbeit nächsten Tag um 8 Uhr anfängt, läuft das Programm immer noch. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Programm bis zu Dominiks Mittagspause, also bis 12 Uhr nicht neugestartet werden muss?

10. Seien X und Y exponentialverteilte Zufallsvariablen. Nehmen wir an, dass der Erwartungswert von X zweimal der Erwartungswert von Y ist, und dass $3\,\mathbb{P}(X > 1) = 2\,\mathbb{P}(Y < 1)$ gilt. Was ist der Erwartungswert und die Varianz von X?

---

11. Seien $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$, $Y = 3X-1$. Bestimmen wir den Wert der Verteilungsfunktion von Y an der Stelle π.

12. Sei X eine auf dem Intervall $[1;4]$ uniformverteilte Zufallsvariable. Bestimmen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion der Zufallsvaribalen $Y = \sqrt{X}$ und berechnen wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{1{,}2 < Y < 1{,}4\}$. Was ist der Erwartungswert von Y? Kann dieser Erwartungswert ohne die Bestimmung der Dichtefunktion von Y berechnet werden?

13. Sei X eine uniformverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[0;1]$. Bestimmen wir den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = e^X$.

14. Seien $X \sim U(-1;1)$ und $Y = X^2$. Berechnen wir die Varianz von Y.

15. Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y = X^2$. Bestimmen wir die Dichtefunktion und die Varianz von Y.

*16. Die Dichtefunktion der *Standard-Cauchy-Verteilung* ist

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Sei X standard-Cauchy-verteilt. Zeigen wir, dass $\mathbb{E}(|X|) = \infty$. Kann der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ als $\pm\infty$ definiert werden?

b) 8 Zahlen zwischen 0 und 1 werden uniform zufällig erzeugt:

0,966273477967348 0,394713268595531 0,899735231113891 0,474621461118444
0,728969725975848 0,0146911108455452 0,907138254095836 0,690170289037809

Wie müssen diese Zahlen transformiert werden, um solche Zahlen zu erhalten, die nach der Standard-Cauchy-Verteilung erzeugt werden? Was ist der numerische Wert der kleinsten (bzw. größten) transformierten Zahl?

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$		$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ $(0 \le t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$