4. Übungsblatt

Poisson-Verteilung, Gemeinsame Verteilung von diskreten Variablen,
Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, Transformationsformel für den Erwartungswert, Varianz

1. In einem Computerservice gibt es keine Reklamation an 2 von 20 Arbeitstagen im Durchschnitt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es an einem gegebenen Tag mindestens 3 Reklamationen gibt?

2. In der Universität gibt es viele Telefonapparate, die unabhängig voneinander und mit gleichen und kleinen Wahrscheinlichkeiten kaputtgehen. Es gibt 12 Tage von den 360 Tagen des Jahres, wenn keine Apparat kaputtgeht. Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Apparate, die an einem Tag kaputtgehen? Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Tage, wenn 2 oder mehr Apparate kaputtgehen?

3. Beim Springreiten wirft ein Reiter die Hindernisse unabhängig voneinander mit gleichen und kleinen Wahrscheinlichkeiten ab. Es gibt viele Hindernisse im Parcours. Nehmen wir an, dass der Reiter ein Rund mit Wahrscheinlichkeit 5% fehlerfrei macht. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 3 Hindernisse in einem Rund abgeworfen werden?

4. Die Strecke eines Laufwettbewerbs führt durch ein Gebiet, wo es viele Zecken gibt. 300 Läufer fanden nach dem Wettbewerb an ihren Körpern (gerade) eine Zecke, während 75 Läufer fanden zwei Zecken. Geben wir eine Schätzung für die Anzahl der Läufer.

5. In einer Bibliothek kann jedes Buch in jedem Monat höchstens einmal, von höchstens einer Person und nur für den entsprechenden Monat ausgeliehen werden. In die Bibliothek werden immer mehr Bücher gebracht, aber die Anzahl der Besucher ändert sich nicht. Daher ist es mit der Zeit immer weniger wahrscheinlich, dass jemand ein bestimmtes Buch in einem Monat ausleiht. Im k-ten Monat (vom Anfang der Beobachtung an) gibt es $3k$ Bücher in der Bibliothek ($k \in \mathbb{N}^+$), und jedes von ihnen wird in diesem Monat unabhängig von den anderen Büchern mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ ausgeliehen.
   (a) Bestimmen wir die (präzise) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass mindestens 3 Bücher im 68. Monat ausgeliehen werden. Was ist die Standardabweichung der Anzahl der ausgeliehenen Bücher im 68. Monat?
   (b) Schätzen wir bei einer großen k durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass mindestens 3 Bücher im k-ten Monat ausgeliehen werden.

---

6. Ein regelmäßiger Würfel wird zweimal geworfen. Sei X die Anzahl der Augenzahlen 6, und sei Y der Anzahl der geraden Ergebnisse. Sind X und Y unabhängig?

7. Die folgende Tabelle enthält die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y.

Y \ X	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

a) $p =?$ b) $\mathbb{P}(X \le 0, Y = 1) =?$ c) Sind X und Y unabhängig? d) $\mathbb{E}(XY) =?$

8. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle angegeben, aber zwei Werte fehlen.

Y \ X	0	1
-1	$1/2$	
1		$1/4$

Bestimmen wir die fehlenden Werte, wenn wir wissen, dass $\mathbb{E}(X) = 1/3$ gilt. Entscheiden wir, ob die Variablen X und Y unabhängig sind.

9. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle angegeben, aber zwei Werte fehlen. Bestimmen wir diese Werte, wenn wir wissen, dass die Ereignisse $\{X = 2\}$ und $\{Y = 0\}$ unabhängig sind. Sind auch die Variablen X und Y unabhängig? Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$ und die Erwartungswerte $\mathbb{E}(4X + Y)$ und $\mathbb{E}(XY)$.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/10	1/5	
2		1/4	1/5

10. In einer Urne gibt es 2 weiße, 2 grüne und 2 rote Bälle. Wir ziehen ein paar Bälle nacheinander (ohne Zurücklegen) aus der Urne bis zum ersten roten Ball. Sei X die Anzahl der gezogenen Bälle, und sei Y die Anzahl der gezogenen weißen Bälle. Geben wir die gemeinsame Verteilung von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

---

11. Ein Würfel wird geworfen, sei X die Augenzahl. Berechenen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}\left((X-3)^2\right)$.

12. Sei X die Zahl eines zufällig gewählten Monats von April bis Dezember. Nehmen wir an, dass wir den i-ten Monat mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{72}$ wählen ($\forall i = 4, \ldots, 12$). Sei noch $Y = (-1)^X$.

    a) Bestimmen wir die Verteilung von Y.

    b) Berechenen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ aufgrund der Verteilung von Y, d.h.: benutzen wir die Definition des Erwartungswertes. Bestimmen wir $\mathbb{E}(Y)$ auch anhand der Verteilung von X, also mit der Transformationformel für den Erwartungswert.

13. Seien $X \sim \mathrm{Pois}(3)$ und $Z = X^2 - X$. Bestimmen wir den Erwartungswert von Z.

14. Sei $X \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{3})$. Bestimmen wir die Werte $\mathbb{E}\left((3-X)^2\right)$, $\mathbb{D}(5-2X)$ und $\mathbb{E}\left((X+1)(X-2)\right)$.

15. Sei X eine Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}(X) = -1$ und $\mathbb{D}(X) = 2$ gelten. Bestimmen wir $\mathbb{E}((2+X)^2)$ und $\mathbb{D}^2(4+3X)$.

16. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n;p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 3)$, wenn wir wissen, dass $\mathbb{E}(X) = 3$ und $\mathbb{D}(X) = 1{,}5$ gelten.

17. Seien $X, Y \sim \mathrm{Geo}(\frac{2}{3})$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen wir die folgenden Werte:

    a) $\mathbb{E}(XY)$ b) $\mathbb{D}(X+Y)$ c) $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$ d*) $\mathbb{P}(X = Y)$.

18. Seien $X, Y \sim \mathrm{Geo}(p)$ unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit dem gleichen Parameter $p \in (0;1)$. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 3)$, falls $\mathbb{D}(X+Y) = 2$ gilt.

*19. Seien $X \sim \mathrm{Bin}(n;p)$ und $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Bestimmen wir die Momente $\mathbb{E}(X^3)$ und $\mathbb{E}(Y^3)$.

Verteilung	Notation	ran$X$	$f_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$