3. Übungsblatt

Bayes-Formel, diskrete Zufallsvariablen, Erwartungswert, Binomialverteilung, geometrische Verteilung

1. Ein regulärer Würfel wird geworfen, und auch eine reguläre Münze wird danach n -mal geworfen, wo die Zahl n das Ergebnis des ersten Wurfes ist.
 - a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein "Kopf" bei den Würfeln vorkommt?
 - b) Unter der Annahme, dass kein "Kopf" bei den Würfeln vorkommt, bestimmen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Wurf eine 6 ist.
 2. Zwei reguläre Würfel werden geworfen, und wenn die Anzahl der Augenzahlen 6 k ist, dann werden k rote und $2 - k$ gelbe Bälle in eine (anfangs leere) Box eingesetzt. Danach werden zwei Bälle mit Zurücklegen gezogen, und wir wissen, dass beide gezogene Bälle rot sind. Was würde unser Tipp für den Wert von k ? Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Tipp gut ist?
 3. Alex und Beate spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Kartenpaket. Zuerst zieht Alex zwei Blätter aus dem gemischten Paket, und dann zieht Beate ein Blatt aus der Hand von Alex (ohne Kenntnis der Werten oder der Farben dieser zwei Blätter).
 - a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Beate ein Herz zieht?
 - b) Angenommen, dass Beate ein Herz zog, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das andere Blatt, das in der Hand von Alex blieb, auch ein Herz ist?(In einem ungarischen Spielkartenpaket gibt es 32 Blätter, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)
 4. Eine Computerfabrik beschafft die Grundplatten von 3 fernöstlichen Firmen: von einer chinesischen, einer taiwanischen und einer koreanischen Firma. 45% der Grundplatten kommen von dem chinesischen Einlieferer, und 0,5% von denen sind fehlerbehaftet. 30% der Grundplatten kommen von der taiwanischen Firma, und jede hunderste Grundplatte von diesen ist fehlerbehaftet. Der Rest wird von der koreanischen Firma mit Fehlerquote 3,5% hergestellt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
 - a) eine zufällig gewählte Grundplatte fehlerfrei ist?
 - b) eine zufällig gewählte Grundplatte koreanisch ist, angenommen, dass sie fehlerfrei ist?
 5. Es gibt drei mögliche Antworten für eine Prüfungsfrage. Eine hypothetische Studierende weiß die richtige Antwort mit Wahrscheinlichkeit p , und sonst tippt er (wählt aus den 3 Antworten zufällig mit gleichen Wahrscheinlichkeiten). Angenommen, dass die Frage richtig beantwortet wurde, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Studierende die Antwort wirklich gewusst hat? Was ist der Wert dieser Wahrscheinlichkeit, wenn $p = \frac{1}{4}$ gilt?
-
6. Eine reguläre Münze wird dreimal geworfen. Der Ergebnisraum Ω ist die Menge von 3-Tupeln mit Elementen "Kopf" oder "Zahl", die dementsprechend mit $KKK, ZKK, \dots$ bezeichnet werden. Die Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird folgenderweise definiert: $X(KKK) = 0$, und der Wert von X ist der Index der ersten "Zahl" für jedes andere Ergebnis (z. B. $X(KZK) = 2$). Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X ungerade ist.
 7. Zwei Würfel werden geworfen. Bezeichnen wir die Ergebnisse der Würfe mit X bzw. Y . Bestimmen wir $\mathbb{P}(X \leq Y)$. Was ist der Erwartungswert des Maximums der Augenzahlen?
 8. Nehmen wir an, dass die Gewinne beim Lotto fix sind: 1 Milliarde (Forints) bei 5 richtigen Zahlen, 6 Millionen bei 4 richtigen Zahlen, 35 Tausend bei 3 richtigen Zahlen, und 2 Tausend bei 2 richtigen Zahlen. Was ist der Erwartungswert des Gewinns (mit einem Lottoschein)?
 9. In einem Geschäft werden Glühlampen verkauft. Wir wissen, dass 1% der Glühlampen fehlerbehaftet ist. Wir kaufen 100 Stücke, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens drei Stücke fehlerbehaftet sind? Wie viele fehlerbehaftete Glühlampen erwarten wir beim Kaufen?

10. Eine Prüfung besteht aus 10 Testfragen, und es gibt 4 mögliche Antworten auf jede Frage, von denen höchstens eine gewählt werden kann. Bei jeder Frage gibt es immer nur eine richtige Antwort. Wir füllen einen solchen Test zufällig aus, also wählen wir gerade eine Antwort bei jeder Frage zufällig ohne vorheriges Wissen oder zusätzliche Information (d.h., wir wählen jede Antwort mit gleicher ($1/4$) Wahrscheinlichkeit), und wir beantworten die Fragen unabhängig voneinander.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir keine richtige Antwort geben?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit geben wir mindestens 4 richtige Antworten?
 - Was ist der Erwartungswert der richtigen Antworten?
 - Wie viele richtige Antworten geben wir mit der größten Wahrscheinlichkeit? Und falls es 11 Fragen gibt?
11. N Prinzen möchten die Hand der wunderschönen Prinzessin gewinnen, deshalb ladet jeder Prinz sie jeden Tag zu (gerade) einem Rendezvous ein. Die Prinzessin bittet ihre Diensthilfe, diese Einladungen zu behandeln. Die Diensthilfe soll jede Einladung (unabhängig von den anderen) im Namen der Prinzessin mit Wahrscheinlichkeit p annehmen und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ höflich ablehnen. Da die Prinzessin sehr beschäftigt ist, so möchte sie sich an einem Tag höchstens mit einem Prinz treffen (zumindest wenn es möglich ist), aber zu einem Rendezvous (pro Tag) würde sie gerne gehen. Wie muss die Prinzessin die Zahl p wählen, um ihren Plan mit maximaler Wahrscheinlichkeit zu realisieren? Was ist der Grenzwert dieser (maximalen) Wahrscheinlichkeit, falls $N \rightarrow \infty$?
12. Seien $X \sim \text{Bin}(3; \frac{1}{4})$ und $Y = X^2$. Bestimmen wir die Verteilung und den Erwartungswert von Y . Können wir den Erwartungswert ohne die Bestimmung der Verteilung berechnen?
13. Nehmen wir an, dass die Funktion $\text{Indicator}(p)$ den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zurückgibt. Geben wir die Verteilung des Rückgabewertes der folgenden Funktion an.
- ```
def RandomExperiments():
 k = 1
 while Indicator(0.5) == 0:
 k += 1
 return k
```
14. Man würfelt mit einem fairen Würfel und stoppt nach dem ersten Wurf mit einer Augenzahl kleiner als 3. Sei  $X$  die Anzahl der Würfe.
- Welche Wahrscheinlichkeit ist größer:  $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$  oder  $\mathbb{P}(X > 3)$ ?
  - Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens zehnmal wirft, angenommen, dass man bei allen der ersten 6 Würfe eine Augenzahl größer als 2 bekommt?
15. Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal zwei aufeinander folgende Würfe die gleiche Ergebnisse geben.
- Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Würfe?
- \*\*b) Was ist dieser Erwartungswert, wenn wir bis zu den ersten drei aufeinander folgenden gleichen Würfeln warten?
16. Man würfelt mit einem fairen Würfel und stoppt nach der ersten 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe gerade ist?
- \*17. In einer Urne gibt es eine rote und eine weiße Kugel. Wir ziehen (zufällig) eine Kugel, und wenn sie rot ist, halten wir an. Sonst legen wir die gezogene weiße Kugel zusammen mit einer neuen weißen Kugel in die Urne zurück, und dann wiederholen wir den Prozess (d.h. wir ziehen eine aus den drei Kugeln, wir halten an, wenn sie rot ist, sonst machen wir weiter mit einer roten und drei weißen Kugeln, usw.). Sei  $Y$  die Anzahl der Ziehungen. Bestimmen wir die Verteilung und den Erwartungswert von  $Y$ .
- \*18. In einer Urne gibt es  $N$  rote und  $M$  weiße Kugeln. Wir ziehen  $N$  Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der gezogenen roten Bällen.