2. Übungsblatt

Wahrscheinlichkeitsräume, Siebformel, Unabhängigkeit von Ereignissen,
bedingte Warhscheinlichkeiten, Multiplikationsregel, Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

1. Sei A das Ereignis, dass jede Zahl bei der Ziehung der Lottozahlen mindestens 10 ist, und sei B_i das Ereignis, dass die Zahl i gezogen wird ($1 \le i \le 90$). Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A \cup B_{10})$ und $\mathbb{P}(A \cup B_9 \cup B_{10})$.

2. Zwei reguläre Münzen werden n-mal geworfen. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide der Ergebnisse "zwei Köpfe" und "zwei Zahlen" bei der Würfe (mindestens einmal) vorkommen.

*3. In einer Klasse gehen 15 Jungen und 15 Mädchen. Vor der Bandweihe wählt jeder Junge zufällig und unabhängig von den Anderen ein Mädchen (jedes Mädchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit), das er dann zum Tanz auffordern möchte. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es (mindestens) ein solches Mädchen gibt, das von genau 6 Jungen aufgefordert wird?

*4. In einer Klasse gehen N Schüler*innen. Anfang Dezember schreiben sie ihre Namen auf Papierfetzen, und jeder Schüler/jede Schülerin zieht zufällig (genau) einen Namen um zu entscheiden, wem er/sie am Nikolaustag beschenken wird (der Name wird nach dem Ziehen nicht zurückgelegt). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass niemand sich selbst zieht? Was ist der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit, falls $N \to \infty$?

**5. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Sei noch $P_{[m]}$ ($0 \le m \le n$) die Wahrsheinlickeit dafür, dass gerade m von den Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ eintreten. Beweisen wir die Gleichung

$$P_{[m]} = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} S_{m+i},$$

wo

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

für $1 \le k \le n$ und $S_0 = 1$ gilt. Betrachten wir die Situation, die in Aufgabe 4 beschrieben wurde. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich gerade m Student*innen selbst ziehen ($0 \le m \le N$)? Was ist der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit, falls $N \to \infty$?

6. Zeigen wir, dass die Ungleichung $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{A}) \le \frac{1}{4}$ für jedes Ereignis A gilt.

7. Wir wissen, dass $\mathbb{P}(A) = 0{,}7$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}6$, $\mathbb{P}(C) = 0{,}9$ gilt. Zeigen wir die folgende: a) $\mathbb{P}(A \cap B) \ge 0{,}3$ b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \ge 0{,}2$. Was für (untere und obere) Schranken können wir für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C))$ und $\mathbb{P}(A \cup B)$ geben?

8. Zeigen wir, dass die folgende Ungleichung für jede ganze Zahl $n \ge 1$ und für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ (in demselben Wahrscheinlichkeitsraum) gilt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \ge \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - n + 1.$$

---

9. Eine reguläre Münze wird dreimal geworfen. Sei A das Ereignis, dass beide Ergebnisse "Kopf" und "Zahl" bei den Würfen auftreten, und sei B das Ereignis, dass höchstens eine "Zahl" vorkommt. Sind A und B unabhängig?

10. Zwei reguläre Würfel werden geworfen. Betrachten wir die folgende Ereignisse:

$$A = \{\text{die Summe der Augenzahlen ist gerade}\},$$
$$B = \{\text{der Absolutbetrag der Differenz der Augenzahlen ist mindestens 3}\}.$$

Sind A und B unabhängig? Was ist der Wert von $\mathbb{P}(A \mid B)$?

11. Nehmen wir an, dass die Ereignisse A, B und C gemeinsam unabhängig sind und dass $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$ und $\mathbb{P}(C) = 0{,}8$ gelten. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

    a) alle der Ereignisse A, B und C treten ein, b) mindestens eines der drei Ereignesse tritt ein, c) keines von ihnen tritt ein.

12. Wir wissen, dass mindestens eines der Ereignissen A und B immer eintritt. Bestimmen wir $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \mid \overline{B})$, wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}2$ und $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}5$ gelten. Sind A und B unabhängig?

13. Seien A, B und C Ereignisse, von denen mindestens eines immer eintritt. Nehmen wir noch an, dass A und B unabhängig, während B und C disjunkt sind. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ereignisse, wenn auch $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ gelten.

14. Nehmen wir an, dass jedes der Ereignisse A, B und C mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eintritt, und dass A und B bzw. B und C disjunkt sind. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \cap C)$, wenn wir wissen auch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keines von A, B und C eintritt, $\frac{1}{9}$ ist. Sind A und C unabhängig?

---

15. In einer Urne gibt es 3 rote, 5 weiße und 6 grüne Kugeln. Wir ziehen 3 Kugeln. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir zuerst eine rote, nächstens eine weiße, und endlich eine grüne Kugel ziehen, wenn wir die Kugeln a) nach jeder Ziehung in die Urne zurücklegen? b) nach den Ziehungen nicht zurücklegen?

16. Ein Mathematiker hat 10 Paar Socken mit 10 verschiedenen Farben (die zwei Socken eines Paars sind immer gleich). Er fährt an drei aufeinander folgenden Tagen spät von zu Hause los, und deshalb wählt er zwei Socken zufällig aus der Schublade, wo er seine ungepaarten (sauberen) Socken hält. Nehmen wir an, dass alle Socken am ersten Tag sauber sind, und dass die smutzigen Socken während dieser drei Tage nicht gewaschen (und deshalb nicht in der Schublade zurückgelegt) werden. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er an jeden von diesen drei Tagen zwei Socken gleicher Farbe wählt?

17. In einer Box gibt es 15 Tennisbälle, von denen 9 unbenutzt sind. Zu einem Tennisspiel wählen wir 3 Bälle (zufällig) aus der Box, die nach dem Spiel zurückgesetzt werden. Wenn wir einen unbenutzten Ball ausnehmen, dann wird er nach dem Spiel natürlich benutzt. Wir spielen drei Spiele. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir zu jedem Spiel einen unbenutzten und noch 2 benutzte Bälle wählen?

---

18. Wir ziehen ein Blatt aus einem französischen Spielkartenpacket (mit 52 Blätter). Falls es ein *Pik* ist, wir werfen einen regelmäßigen Würfel *einmal*, sonst werfen wir ihn *zweimal*. Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Augenzahl 6 bei den Würfen vorkommt?

19. Es gibt zwei Urnen, eine enthält 5 grüne und 7 blaue Kugeln, und die andere enthält 3 grüne und 8 blaue Kugeln. Wir ziehen 2 Kugeln aus der ersten Urne und setzen sie in die zweite Urne ein. Dann laden wir eine Kugel aus der zweiten Urne in die erste um. Wir ziehen schließlich noch eine Kugel aus der ersten Urne. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese letzte Kugel blau ist.

20. Vier Städte A, B, C und D sind folgenderweise verbunden: es gibt Fahrwege von A nach B und C, von D nach B und C, und es gibt auch eine Route zwischen B und C. An einem Wintertag formt sich eine Schneeverwehung auf jedem Fahrweg (unabhängig voneinander) mit Wahrscheinlichkeit $1/5$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man an einem Wintertag von A nach D fahren kann?