1. Übungsblatt

Ereignisse, Operationen, Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum, Urnemodellen

1. Wir ziehen 4 Bälle nacheinander aus einer Urne, in der nur rote und weiße Bälle sind. Sei A_i das Ereignis, dass der i-te gezogene Ball weiß ist ($1 \leq i \leq 4$). Drücken wir die folgenden Ereignisse anhand der Ereignisse A_i und der Mengenoperationen aus:
   a) alle gezogenen Bälle sind weiß,
   b) der erste weiße Ball kommt bei der dritten Ziehung,
   c) es gibt mindestens einen gezogenen roten Ball,
   d) es gibt gerade einen gezogenen weißen Ball,
   e) alle gezogenen Bälle haben die gleiche Farbe,
   f) mindestens drei gezogene Bälle sind weiß.

2. Wir nehmen die Blätter mit Figuren (also die Buben, die Damen, die Könige und auch die Asse) aus einem französischen Spielkartenpaket hinaus, und dann ziehen wir einige Blätter. Sei A_i das Ereignis, dass mindestens ein Blatt des Wertes i gezogen wird ($2 \leq i \leq 10$), und seien P, Kr, H, Ka die Ereignisse, dass mindestens ein Blatt der Farbe Pik, Kreuz, Herz bzw. Karo gezogen wird. Schliesslich, sei B_j das Ereignis, dass gerade j Blätter gezogen werden ($1 \leq j \leq 36$). Geben wir einen Ausdruck für die folgenden Ereignisse anhand der obigen Ereignisse und der Mengenoperationen (wenn es möglich ist).
   a) Wir ziehen nur eine Karo 7 (und kein anderes Blatt).
   b) Weniger als 4 Blätter werden gezogen.
   c) Jedes gezogene Blatt ist Pik oder Kreuz.
   d) 3 Blätter des Wertes 7 werden gezogen (und kein anderes Blatt).
   e) 4 Blätter des Wertes 7 und 4 Blätter des Wertes 10 werden gezogen (und kein anderes Blatt).
   *f) 3 Blätter des Wertes 7 und noch ein beliebiges Blatt werden gezogen.

3. Ein Würfel wird geworfen. Sei P das Ereignis, dass die geworfene Augenzahl ein Primzahl ist, sei noch G das Ereignis, dass eine gerade Zahl geworfen wird, und sei HV das Ereignis, dass die geworfene Zahl höchstens 4 ist. Drücken wir die folgenden Ereignissen anhand der Ereignisse P, G und HV aus:
$$A = \{\text{die Augenzahl ist } 1\}, \qquad B = \{\text{die Augenzahl ist } 2\}, \qquad C = \{\text{die Augenzahl ist } 3\},$$
$$D = \{\text{die Augenzahl ist } 5\}, \qquad E = \{\text{die Augenzahl ist größer als } 3\}.$$

4. Was für Ereignisse A und B haben die folgende Eigenschaften?
   a) $A = A \cap B$ b) $A = A \cup B$ c) $A = A \cap \overline{B}$ d) $A \cup B = A \cap B$

---

5. Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Betrachten wir die folgende Ereignisse:
$$A = \{\text{Würfe mit Augenzahlsumme } 7\}, \qquad B = \{\text{Würfe mit drei geraden Augenzahlen}\},$$
$$C = \{\text{Würfe mit mindestens einer Augenzahl } 3\}.$$
   Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{C}))$ und $\mathbb{P}((A \cup C) \cap \overline{B})$.

6. Eine reguläre Münze wird sechsmal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) der erste Kopf bei dem fünften Wurf auftritt?
   b) genau zwei Köpfe geworfen werden?
   c) mindestens ein Kopf und eine Zahl geworfen werden?
   d) mindestens zwei Köpfe geworfen werden?
   e) die Anzahl der Köpfe gerade (ungerade) ist?
   f) mindestens 2 Köpfe *oder* 3 Zahlen geworfen werden?

7. Betrachten wir eine Ziehung im "Ötöslottó". Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) man genau 2 richtige Zahlen trifft?
   b) man genau k richtige Zahlen trifft?
   c) die kleinste gezogene Zahl 13 ist?
   d) die höchste gezogene Zahl im Intervall $[80; 90]$ liegt?

8. In einer Urne gibt es 3 rote, 3 gelbe und 3 blaue Bälle. Wir ziehen 3 Bälle zufällig aus der Urne ohne Zurücklegen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) die drei gezogenen Bälle drei verschiedene Farben haben?
   b) die drei gezogenen Bälle gleiche Farben haben?

9. Wir betrachten alle ganzzahligen Folgen der Länge n, deren Glieder in der Menge $\{0, 1, 2\}$ enthalten sind (also kann keine andere Zahl in den Folgen auftreten). Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Folge des obenstehenden Typs
   a) mit 0 anfängt,
   b) gerade m Glieder des Wertes 1 enthält,
   c) gerade $m + 2$ Glieder des Wertes 0 enthält, von denen zwei am Ende der Folge stehen,
   d) gerade m_0 Glieder des Wertes 0, m_1 Glieder des Wertes 1, bzw. m_2 Glieder des Wertes 2 enthält.

10. Anna und Bea spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Spielkartenpaket. Nach der Mischung bekommt jede von ihnen (gerade) 8 Karten (und 16 Karten werden nicht verteilt). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
    a) es kein Blatt der Farbe "Herz" nach der Verteilung in der Hand von Anna gibt?
    b) es kein "Herz" nach der Verteilung in den Händen von Anna und Bea gibt?
    c) beide Spielerinnen mindestens ein "Herz" nach der Verteilung in ihren Händen haben?

    (Ein ungarisches Spielkartenpaket besteht aus 32 Blättern, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)

11. Die Schildkröte und der Hase nehmen an einem Wettbewerb teil. Am Anfang stehen sie bei der Startlinie und in jedem Rund wird eine Münze geworfen. Falls das Ergebnis ein Kopf ist, dann tritt der Hase einen Meter vor, und bei einer Zahl tritt die Schildkröte einen Meter vor. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
    a) der Hase nach 101 Würfen vor der Schildkröte steht?
    b) der Abstand des Hasen von der Startlinie (in Meter angegeben) nach 101 Würfen eine gerade Zahl ist?

12. In den Aufzug eines 10-stöckigen Hauses steigen 7 Personen im Erdgeschoss ein. Jede Person verlässt den Aufzug in einer der 10 Etagen, wobei jede Etage gleichwahrscheinlich ausgewählt wird und die Personen einander nicht beeinflussen.
    a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es eine Etage, wo mehrere (mehr als 1) Personen den Aufzug verlassen?
    b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (genau) 2 Personen in der zweiten und 3 Personen in der dritten Etage aussteigen?