

2. Prüfung

Lösungen

1. Seien X und Y Zufallsvariablen, deren Standardabweichungen positiv und endlich sind. Geben wir die folgende Definition und Behauptung an:

- (a) Wie wurde der Korrelationskoeffizient von X und Y in der Vorlesung definiert?
 (b) Angenommen, dass X und Y unabhängig sind, wie kann die Varianz deren Summe anhand der Varianzen von X und Y ausgedrückt werden?

Megolds:

(a)

(0 pont) Jells: $\text{corr}(X, Y)$

(10 pont) $= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$.

(b)

(10 pont) $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$.

2. Stephan kauft sein Frühstück jeden Morgen in der Bäckerei. Er wählt immer gerade eine Backware: mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ kauft er eine Pogatsche, die 150 Forint kostet; er wählt eine Brezel auch mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, dafür bezahlt er 300 Forint; und er kauft ein Croissant mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, das 450 Forint kostet. An 40 aufeinander folgenden Tagen untersuchen wir, wie viel Stephan am Morgen beim Bcker ausgibt, sei X_i dieser Geldbetrag (in Forint) am i -ten Morgen ($i = 1, \dots, 40$).

- (a) Bestimmen wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von X_i .
 (b) Bezeichnen wir mit X den Gesamtbetrag (in Forint), den Stephan in den 40 aufeinander folgenden Tagen beim Bcker ausgibt. Schtzen wir durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 12\,500)$. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit ist im Teil (b) nicht nötig.)

Megolds:

(a) (8 pont)

(1+1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{3} \cdot (150 + 300 + 450) = 300$ (1 pont a szmolsra, ahol elég csak az általános vagy csak a konkrét képlet, de ha hiányzik az általános képlet és rossz a behelyettesítés, akkor ez az 1 pont nem jár; 1 pont a végeredményre).

(1+1 pont) $\mathbb{D}(X_1) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X_1)} = \sqrt{\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2}$ (a két lépés összevonható),

(1+1 pont) ahol $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1}{3} \cdot (150^2 + 300^2 + 450^2) = 105\,000$ (pontozás az első momentumhoz hasonlóan),

(1+1 pont) tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{105\,000 - 300^2} = \sqrt{15000} \approx 122,4745$ (itt már további számolás nem kell, ha az összes részeredmény jó, viszont ha hiányzik a numerikus végeredmény, akkor max. 1 pont. Minimális kerekítési hibáért itt ne vonjunk le pontot).

(b) (12 pont)

(4 pont) Sztenderdizlunk (ezt szöveggel nem kell odarni):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 12\,500) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 40\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{40}\mathbb{D}(X_1)} > \frac{12\,500 - 40 \cdot 300}{\sqrt{40} \cdot \mathbb{D}(X_1)}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 40 \cdot 300}{\sqrt{40} \cdot 122,4745} > \frac{12\,500 - 40 \cdot 300}{\sqrt{40} \cdot 122,4745}\right). \end{aligned}$$

Ennek a 4 pontnak a megoszlása: 2 pont, ha tudja, hogy hogyan kell sztenderdizálni a val. változót (ltalnos $\mathbb{E}(X_1)$ -re és $\mathbb{D}^2(X_1)$ -re), 1 pont, ha jól helyettesíti be a képletbe az adatokat és 1 pont, ha ugyanezeket a transzformációkat a jobb oldalakra is megfelelően végrehajtja.

40 helyett az általános képlet felírásánál természetesen jó az n is, ha később kiderül, hogy $n = 40$.

A két lépés összevonható pontlevonás nélkül, ha azonosítható, hogy az előbbi képletet használja (ide értve azt is, hogy a $\sqrt{40}$ nem csak numerikus értékkel szerepel.)

(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{X - 12\,000}{774,5967} > 0,6455\right)$ (ez az előző lépéssel összevonható, de csak akkor, ha azt nem vonta össze az azelőttivel)

(1 pont) ami a centrális határeloszlás tétele (elég: CHT; de Moivre–Laplace viszont nem jó!) miatt

(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 0,6455)$ -tel közelíthető, ahol $Y \sim N(0; 1)$.

(1 pont) arra, hogy valahol hivatkozik arra, hogy az X független, azonos eloszlású valószínűségi változók összege (konkrétan az X_i -ké, de ezt nem muszáj explicit kimondani. Ha a függetlenség megvan, csak az azonos eloszlás hiányzik, és egyébként jól csinálja, akkor ne vonjuk le ezt a pontot). Emiatt helyes a sztenderdizálás (emiatt $40 \mathbb{E}(X_1)$ az X val. változó várható értéke és $\sqrt{40} \mathbb{D}(X_1)$ a szórása) és emiatt alkalmazható a CHT, de elég, ha egyszer hivatkozik rá.

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség közelítőleg $\mathbb{P}(Y > 0,6455) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 0,6455) = 1 - \Phi(0,6455)$ (a kettő közül elég az egyik)

(1 pont) $\approx 1 - \Phi(0,65)$

(1 pont) $\approx 1 - 0,7422$

(1 pont) $= 0,2578$.

3. In einer Wohnung in Budapest treten Stromausfälle ab und zu auf. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Stromausfall in einem bestimmten Jahr auftritt, $3/4$ ist, und dass die Auftritte von Stromausfällen in verschiedenen Jahren unabhängig sind.

- Sei Y die Anzahl der Jahre in zehn aufeinander folgenden Jahren, in denen mindestens ein Stromausfall vorkommt. Was ist der Erwartungswert von Y ?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Stromausfall in mindestens 8 von 10 aufeinander folgenden Jahren vorkommt?
- In einem bestimmten Zeitpunkt beginnen wir zu messen, wie viel Zeit bis zum nächsten Stromausfall vergeht. Sei X diese Wartezeit (in Jahren gemessen), und nehmen wir an, dass die Verteilung von X stetig und gedächtnislos ist. Aufgrund des oben Gesagten können wir auch annehmen, dass $\mathbb{P}(X \leq 1) = 3/4$ gilt. Bestimmen wir die Standardabweichung von X .
- Angenommen, dass wir mehr als 4 Jahren bis zum ersten Stromausfall warten, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir mehr als 5 Jahren warten müssen?

Megoldás:

(a) (3 pont)

(1 pont) Y binomiális eloszlású

(1 pont) $n = 10$ és $p = 3/4$ paraméterekkel (nem kell indokolni az eddigieket, csak kimondani).

(1 pont) Ezért $\mathbb{E}(Y) = np = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7,5$. (Itt már elég a végeredmény, ha megvannak a paraméterek; np szerepel a táblázatban.)

(b) (5 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(Y \geq 8)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(Y = 8) + \mathbb{P}(Y = 9) + \mathbb{P}(Y = 10)$

(2 pont) $= \binom{10}{8} \cdot (3/4)^8 \cdot (1/4)^2 + \binom{10}{9} \cdot (3/4)^9 \cdot (1/4) + \binom{10}{10} (3/4)^{10}$ ($\binom{10}{k}$ helyett jó a $\binom{10}{n-k}$ is, a $\binom{10}{10}$ elhagyható és a $\binom{10}{9}$ helyett elég az, hogy 10)

(1 pont) $\approx 0,5256$. (Nem kell részletezni, de az első tag numerikus értéke 0,2816, a másodiké 0,1877, a harmadiké pedig 0,0563.)

(c) (8 pont)

(1 pont) X exponenciális eloszlású,(1 pont) mert folytonos és örökifjú eloszlás csak exponenciális lehet (elég annyi, hogy folytonos és örökifjú $\Rightarrow$ exponenciális [eloszlású]).(0 pont) A kérdések megválaszolásához az eloszlás λ paraméterét kell meghatározni.(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} = 3/4$,(1 pont) tehát $e^{-\lambda} = 1/4$,(1+1 pont) vagyis $-\lambda = \ln(1/4)$, azaz $\lambda = \ln 4 \approx 1,3863$. (1 pont a végeredményre, 1 a számolásra. Itt még elég az $\ln 4$ vagy $-\ln(1/4)$, a numerikus végeredmény csak a későbbiekben kell, viszont ha van helyes végeredmény, akkor az elég $\ln 4$ nélkül is.)(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$ (1 pont) $= \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} \approx 0,7213$ (az $1/\lambda$ vagy $1/\ln 4$ elég, ha impliciten derül ki, viszont kell a numerikus végeredmény).

(d) (4 pont)

(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(X > 5 | X > 4)$ (2 pont) $= \mathbb{P}(X > 1)$ az örökifjúság miatt (ez a két pont csak akkor jár, ha hivatkozik az örökifjúságra, de ha az eredmény jó, akkor a továbbiakra még lehet pontot kapni).(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{4}$.($\mathbb{P}(X \leq 1)$ értékét tudjuk a (c) rész szövegéből, ezért indoklasként elég a komplementer valószínűségre hivatkozni, a végeredmény és az indoklás együtt 1 pont. Ha már a (c)-re adott megoldásában is megjelent valahol, hogy $\mathbb{P}(X > 1) = 1/4$, akkor OK a végeredmény újabb indoklás nélkül is.)4. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} c(s+t), & \text{falls } 1 < s < 2 \text{ und } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $c \in \mathbb{R}$ eine geeignete reelle Zahl ist.(a) Bestimmen wir den Wert von c .(b) Bestimmen wir die Dichtefunktion von X .(c) Bestimmen wir den Erwartungswert von Y .**Megoldás:**

(a) (7 pont)

(1 pont) $f_{X,Y}$ akkor lesz sűrűségfüggvény, ha nemnegatív (az is jó, ha azt írja, hogy c -nek kell nemnegatívnak lennie, és nem baj, ha nem ellenőrzi a végén még egyszer, hogy ez teljesül-e)(1 pont) és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds dt$ (1 pont) $= \int_1^2 \int_1^2 c(s+t) ds dt$ (az előző lépéssel összevonható, ha kiderül, hogy 1-nek kell lennie az integrálnak)(1 pont) $= c \int_1^2 [s^2/2 + st]_{s=1}^2 dt = c \int_1^2 \frac{3}{2} + t dt$ (1 pont) $= c \left[\frac{3}{2}t + \frac{t^2}{2} \right]_{t=1}^2$ (1 pont) $= c \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = 3c,$

(1 pont) tehát $c = \frac{1}{3}$.

(b) (6 pont)

(1 pont) $s \in \mathbb{R}$ esetén $f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) dt$

(1 pont) $= \int_1^2 \frac{1}{3}(s+t) dt$

(1 pont) $= \frac{1}{3}[st + t^2/2]_{t=1}^2$

(1 pont) $= \frac{1}{3}\left(s + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}s + \frac{1}{2},$

(1 pont) ha $s \in (1; 2),$

(1 pont) és $f_X(s) = 0$ egyébként.

(c) (7 pont)

1. megoldás.

(1 pont) Y -nak ugyanaz a sűrűségfüggvénye, mint X -nek

(ezért az 1 pontért elég, ha ez impliciten derül ki, viszont ha Y helyett X várható értékét kezdi el kiszámolni és Y -ra nincs kellő utalás, akkor a (c)-re max. 3 pont),

(1 pont) mert $f_{X,Y}$ szimmetrikus (s -ben és t -ben).

Természetesen az is jó, ha kiszámolja s szerinti integrálással és úgy hozza ki ugyanezt az eredményt. Akkor is max. 2 pont, de ha kihagyja, hogy $(1; 2)$ -n kívül 0 a sűrűségfüggvény, azért ne vonjunk le még egy pontot abban az esetben, ha $(1; 2)$ -n jó képletet ad meg.

(1+1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t) dt = \int_1^2 t \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\right) dt$ (a két lépés összevonható)

(0 pont) $= \int_1^2 \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{2}t dt$

(1 pont) $= [t^3/9 + t^2/4]_{t=1}^2$

(1 pont) $= \frac{8}{9} + \frac{4}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$

(1 pont) $= \frac{55}{36} (\approx 1,5278).$

2. megoldás.

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_{X,Y}(s, t) ds dt$

(1 pont) $= \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3}st + \frac{1}{3}t^2 ds dt$

(1 pont) $= \int_1^2 \left[\frac{1}{6}s^2t + \frac{1}{3}st^2 \right]_{s=1}^2 dt$

(1 pont) $= \int_1^2 \frac{4}{6}t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{6}t - \frac{1}{3}t^2 dt = \int_1^2 \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 dt$

(3 pont) ugyanúgy, mint az 1. megoldás utolsó 3 pontjánál. (Természetesen az is OK, ha először y és aztán x szerint integrál, pontozás analóg módon.)

5. Die Reisezeit eines Fluges (zwischen zwei bestimmten Städten) wurde sechsmal gemessen und die folgenden Ergebnisse wurden erhalten (gemessen in Stunden, in Dezimalform):

$$x_1 = 0,97 \quad x_2 = 0,98 \quad x_3 = 0,99 \quad x_4 = 1,01 \quad x_5 = 1,00 \quad x_6 = 0,99.$$

Der Datenvektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ wird als eine Realisierung einer einfachen Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_6)$ betrachtet, deren Stichprobenvariablen normalverteilt sind.

- (a) Geben wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95% für den Erwartungswert der Stichprobenvariablen aufgrund des obigen Datenvektors an.
- (b) Konstruieren wir einen Hypothesentest zum Fehlerniveau $\varepsilon = 0,02$, um zu entscheiden, ob der Erwartungswert der Stichprobenvariablen gleich 1 Stunde ist. Stellen wir eine der Situation entsprechende Nullhypothese H_0 und die zugehörige Alternativhypothese H_1 auf, und berechnen wir den Wert der Teststatistik. Entscheiden wir, ob H_0 angenommen oder verworfen werden muss, und begründen wir die Entscheidung.
- (c) Geben wir den Wert der zur obigen Realisierung gehörigen empirischen Verteilungsfunktion an der Stelle $t = 0,995$ an. (Begründen wir die Antwort.)

Megoldás:

(a) (9 pont)

(1 pont) arra, hogy az ismeretlen szórás esetére vonatkozó (avagy t -kvantilis, t -próbánál szereplő, korrigált empirikus szórásos stb.) konfidenciaintervallum képlete kell. Ha jó képletet használ, akkor nem baj, ha ezt nem írja oda.

(1 pont) $n = 6$ (ez a mintaelemszám),

(1 pont) $\bar{x}_6 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 0,99$ (csak 1 pont jár rá, ezért OK indoklás nélkül is, $\bar{x}_n$ jelöléssel is jó),

(0 pont) $s_n^* = \sqrt{(s_n^*)^2}$

(2 pont) $= \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (x_i - 0,99)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} (0,02^2 + 0,01^2 + 0 + 0,02^2 + 0,01^2 + 0)} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{4+1+4+1}{10\,000}} = \sqrt{1/5000} = \frac{\sqrt{2}}{100} = 0,0141$.

(Ha ezt a számológép statisztikai eszköztárával határozza meg, és nem írja ki a részletes számolásokat, akkor is jár a 2 pont.)

(1 pont) a szükséges t -kvantilis pedig $t_{n-1;\varepsilon/2} = t_{5;0,025}$

(1 pont) $= 2,571$.

(1+1 pont) A képletbe behelyettesítve a konfidenciaintervallum:

$$\left[\bar{x}_n - \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,99 - \frac{2,571 \cdot 0,0141}{\sqrt{6}}; 0,99 + \frac{2,571 \cdot 0,0141}{\sqrt{6}} \right] = [0,9752; 1,0048].$$

Az általános képletre itt nem jár pont. 1 pont arra, hogy behelyettesíti a képletbe a kapott értékeket, és 1 pont a numerikus végeredményre. Ha már mindent kiszámolt és utána csak a numerikus végeredményt adja meg, akkor ne vonjunk le pontot.

Megjegyzés: ha a $\frac{\sqrt{2}}{100}$ pontos értékkel számolunk, akkor is ez az eredmény jön ki 4 tizedesjegyre kerekítve.

(b) (8 pont)

Először a jó megoldást közöljük, a hibás alternatíva vagy próbatípus esetén járó részpontokat lásd lent.

(1 pont) $H_0: \mu_0 = 1$ vs. $H_1: \mu_0 \neq 1$ (ahol μ_0 az eloszlás várható értéke),

(1 pont) tehát mivel a szórás ismeretlen, a kétoldali, egymintás t -próba képletét kell használni. (Ha ezt nem írja oda, de jól alkalmazza ezt a próbát, akkor ezt az 1 pontot ne vonjuk le.)

(1+1 pont) A próbastatisztika értéke $t(= t(x_1, \dots, x_6)) = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s_n^*} \sqrt{n} = \frac{0,99 - 1}{0,0141} \sqrt{6} \approx -1,7372$. (1 pont arra, hogy jól behelyettesíti a táblázatban megadott képletbe, ideértve azt is, hogy $\mu_0 = 1$. Természetesen jó n helyett 6-ot írni mindenhol. 1 pont pedig arra, hogy kiszámolja a helyes numerikus eredményt. Ha az utóbbi megvan és a szükséges mennyiségek értékei μ_0 -t kivéve már az (a)-ban kiderültek, akkor adjuk meg az első pontot is, akkor is, ha nem írja oda, hogy $\mu_0 = 1$).

(2 pont) H_0 -t akkor fogadjuk el/nem utasítjuk el, ha $|t| \leq t_{n-1,\varepsilon/2} = t_{5;0,99}$ (bármilyen, ezzel ekvivalens alak jó, az is, ha azt írja, hogy mikor utasítjuk el. Ne vonjunk le pontot, ha rossz helyre teszi az egyenlőséget.)

(1 pont) $= 3,365$.

(1 pont) Tehát H_0 -t elfogadjuk (azaz azt mondjuk, hogy a mintaelemek várható értéke megegyezik 1 órával, illetve nincs elég bizonyítékunk ahhoz, hogy azt mondjuk hogy ez nem igaz).

Pontozás a (b)-ben hibás próbatípus, illetve alternatíva esetén:

Ha egyoldali t -próbát hajt végre $H_0: \mu \geq 1$ vs. $H_1: \mu < 1$ alternatívával, akkor max. 5 pont (a rossz alternatíváért csak egy pontot vonnánk le, de nincs is a táblázatban megfelelő kvantilis, így annak numerikus értékére sem járhat pont, és ennek fel kellene tűnnie). Ha egyoldali t -próbát hajt végre $H_0: \mu \leq 1$ vs. $H_1: \mu > 1$ alternatívával, az még rosszabb, mert az alacsony átlag alapján nem gyanakodhatunk arra, hogy a várható érték 1-nél nagyobb, így ekkor max. 4 pont.

Ha kétoldali u -próbát hajt végre a fenti helyes alternatívára, akkor pedig az nem világos, hogy σ micsoda. Ebben az esetben is max. 4 pont, amiből 1 az $u_{0,025}$ kiolvasására jár. Ha egyoldali u -próbát hajt végre a $H_0: \mu \geq 1$ vs. $H_1: \mu < 1$ alternatívára, akkor az alternatíva sem felel meg a feladatnak, így max. 3 pont, ha pedig ugyanezt a $H_0: \mu \leq 1$ vs. $H_1: \mu > 1$ alternatívával csinálja, akkor max. 2 pont. Ezekben az esetekben az $u_{0,05}$ kiolvasására jár 1–1 pont.

(c) (3 pont)

(2 pont) Megadja az empirikus eloszlásfüggvény adott pontbeli értékének definícióját: $F_n^*(t)$ a t -nél kisebb vagy azzal egyenlő mintaelemek száma, osztva n -nel. Jó szövegesen is, a $\frac{1}{n} \cdot \#\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \leq t\}$ definícióval, ill. a rendezett mintaelemekkel kifejezett ($F_n^*(t) = \frac{i}{n}$, ha $x_i^* \leq t < x_{i+1}^*$) definícióval is.

Az is jó, ha eleve a konkrét n -re és t -re mondja el ugyanezt, de ha nincs általános képlet és a konkrét esetben rosszul írja fel, akkor 0 pont.

(1 pont) Esetünkben ez $F_6^*(0,995) = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$. (Ezért az egy pontért elég a végeredmény is, ha van előtte valami indoklás vagy legalább minimális számolás. Tizedestört alakban és nem egyszerűsített $\frac{4}{6}$ alakban is jó.)

*6. Sei $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ein zweidimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Seien noch $U = X + Y$ und $V = X - Y$.

(a) Bestimmen wir den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

(b) Aufgrund des Ergebnisses des vorigen Teiles geben wir die Regression $\mathbb{E}(V|U)$ an.

Megoldás:

(a) (12 pont)

(1 pont) $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ (ha kimondja, hogy a várható érték linearitását használja, akkor egyből mehet a $-1 + 2$ anélkül, hogy odaírná, hogy ez $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ -nal egyenlő)

(1 pont) $= -1 + 2 = 1$.

(1 pont) $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -3$ (itt már nem jár még egyszer pont az indoklásra, elég a végeredmény).

(1 pont) $\mathbb{D}^2(U) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$

(1 pont) $= 9 + 9 + 2 = 20$.

(2 pont) $\mathbb{D}^2(V) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$ (ha ez a képlet jól szerepel, akkor nem kell jobban részletezni. Ha U szórásnégyzetének kiszámolásánál már szerepelt az összeg szórásnégyzetének képlete és most jól csinálja, akkor elég konkrét számokkal, de ha előjelhiba van és hiányzik az általános képlet, akkor ez a 2 pont sem jár. Ha azt írja, hogy $\mathbb{D}^2(V) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(-Y) + 2\text{cov}(X, -Y)$ és később rontja el, akkor itt 1 pont jár, a másik nem, és később lehet részpontokat adni).

(1 pont) $= 9 + 9 - 2 = 16$.

(2 pont) $\text{cov}(U, V) = \text{cov}(X + Y, X - Y) = \mathbb{D}^2(X) + \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(X, Y) - \mathbb{D}^2(Y)$ (itt 1 pont jár arra, hogy a kovariancia bilinearitását használja – nem kell megnevezni – és 1 összesen arra, hogy

valaminek az önmagával vett kovarianciája a szórásnégyzet és a kovariancia szimmetrikus. A két lépés összevonható, itt is összevontuk)

(0 pont) = 0.

(1+1 pont) Tehát a várhatóérték-vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ és a kovarianciamátrix $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Itt nem kell az általános képlet, ha jól helyettesít be a kapott eredmények alapján. Ha nem tudja kiszámolni az értékeket, de felírja, hogy milyen mennyiségeknek kellene szerepelnie a várható érték vektor és a kovarianciamátrix adott helyein *a konkrét U és V esetén*, akkor ezt az 1–1 pontot meg lehet adni.

(b) (8 pont)

(1 pont) $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ is kétdimenziós normális eloszlású, (az is OK, hogy „többdimenziós”; az is jó, ha azt írja valahogyan, hogy $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ normális eloszlású az (a)-ban kiszámolt konkrét paraméterekkel)

(2 pont) mert $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ egy lineáris transzformáltja (ezt nem kell részletezni, de ha megadja a konkrét lineáris transzformációt, azt elfogadjuk a lineáris transzformáltságra való hivatkozás nélkül is).

Innen 1. megoldás:

(2 pont) Többdimenziós (kétdimenziós) normális eloszlás esetén a korrelálatlanságból következik a függetlenség. (Azt nem kell még jobban a javító szájába rágni, hogy U és V korrelálatlanok, ha ez már kijött az (a)-ban. A korrelálatlanság helyett természetesen arra is elég hivatkozni, hogy a kovariancia 0.)

Ha csak annyit ír, hogy a korrelálatlanság miatt függetlenek, de már korábban megjelent valahogy, hogy $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ is többdimenziós normális eloszlású, azt fogadjuk el. Ha ez nem szerepelt, akkor max. 1 pont a kettőből.

(2 pont) ezért $\mathbb{E}(V|U) = \mathbb{E}(V)$

(1 pont) = -3 ,

2. megoldás:

(1 pont) Többdimenziós (kétdimenziós) normális eloszlás esetén a regresszió lineáris (ezért az 1 pontért ennyi elég, de természetesen az is jó, ha konkrétan azt írja, hogy $\mathbb{E}(V|U)$ megegyezik V -nek U -ra vett lineáris regressziójával, vagy ha nem szövegesen írja ezt, hanem egyértelműen a lineáris regressziónak megfelelő, helyes képletet akar használni).

Ha csak annyit ír, hogy a regresszió lineáris (vagy ennek megfelelőjét a konkrét esetre nézve), de már korábban megjelent valahogy, hogy $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ is többdimenziós normális eloszlású, azt fogadjuk el. Ha ez nem szerepelt, akkor max. 1 pont a kettőből.

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(V|U) = \beta U + \alpha$, (ha kiszámolja β -t és α -t helyesen, de nem használja ezt a jelölést, az is OK)

(1+1 pont) ahol $\beta = \frac{\text{cov}(U, V)}{\mathbb{D}^2(U)} = 0$ (ha csak $\beta = 0$ szerepel, akkor max. 1 pont)

(1 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(V) - \beta \mathbb{E}(U) = -3$ (itt az első pont a képletre jár, ami jó konkrét számokkal is, de csak ha azonosítható, hogy ezt a képletet használja, a második pont pedig $\mathbb{E}(V)$ azonosítására és a végeredményre, $\mathbb{E}(U)$ értéke természetesen nem kell).

(0 pont) Tehát $\mathbb{E}(V|U) = -3$. (Ha $\mathbb{E}(V|U) = \beta U + \alpha$ már szerepelt és csak a végeredmény hiányzik, akkor ne vonjunk le pontot.)

Ha regressziós egyenest ad meg, nem pedig magát a lineáris regressziót, akkor 1 pont levonás.