

2. Prüfung

Allgemeine Regeln: Die Prüfung dauert 100 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse müssen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Ohne Beweis dürfen nur solche Behauptungen verwendet werden, die in der Vorlesung dieses oder eines früher studierten Kurses diskutiert wurden. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Seien X und Y Zufallsvariablen, deren Standardabweichungen positiv und endlich sind. Geben wir die folgende Definition und Behauptung an:
 - (a) Wie wurde der Korrelationskoeffizient von X und Y in der Vorlesung definiert?
 - (b) Angenommen, dass X und Y unabhängig sind, wie kann die Varianz deren Summe anhand der Varianzen von X und Y ausgedrückt werden?
2. Stephan kauft sein Frühstück jeden Morgen in der Bäckerei. Er wählt immer gerade eine Backware: mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ kauft er eine Pogatsche, die 150 Forint kostet; er wählt eine Brezel auch mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, dafür bezahlt er 300 Forint; und er kauft ein Croissant mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, das 450 Forint kostet. An 40 aufeinander folgenden Tagen untersuchen wir, wie viel Stephan am Morgen beim Bäcker ausgibt, sei X_i dieser Geldbetrag (in Forint) am i -ten Morgen ($i = 1, \dots, 40$).
 - (a) Bestimmen wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von X_i .
 - (b) Bezeichnen wir mit X den Gesamtbetrag (in Forint), den Stephan in den 40 aufeinander folgenden Tagen beim Bäcker ausgibt. Schätzen wir durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 12\,500)$. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit ist im Teil (b) nicht nötig.)
3. In einer Wohnung in Budapest treten Stromausfälle^a ab und zu auf. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Stromausfall in einem bestimmten Jahr auftritt, $3/4$ ist, und dass die Auftritte von Stromausfällen in verschiedenen Jahren unabhängig sind.
 - (a) Sei Y die Anzahl der Jahre in zehn aufeinander folgenden Jahren, in denen mindestens ein Stromausfall vorkommt. Was ist der Erwartungswert von Y ?
 - (b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Stromausfall in mindestens 8 von 10 aufeinander folgenden Jahren vorkommt?
 - (c) In einem bestimmten Zeitpunkt beginnen wir zu messen, wie viel Zeit bis zum nächsten Stromausfall vergeht. Sei X diese Wartezeit (gemessen in Jahren), und nehmen wir an, dass die Verteilung von X stetig und gedächtnislos ist. Aufgrund des oben Gesagten können wir auch annehmen, dass $\mathbb{P}(X \leq 1) = 3/4$ gilt. Bestimmen wir die Standardabweichung von X .
 - (d) Angenommen, dass wir mehr als 4 Jahren bis zum ersten Stromausfall warten, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir mehr als 5 Jahren warten müssen?
4. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} c(s + t), & \text{falls } 1 < s < 2 \text{ und } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $c \in \mathbb{R}$ eine geeignete reelle Zahl ist.

- (a) Bestimmen wir den Wert von c .
- (b) Bestimmen wir die Dichtefunktion von X .
- (c) Bestimmen wir den Erwartungswert von Y .

^a r Stromausfall, =e: áramszünet

5. Die Reisezeit eines Fluges (zwischen zwei bestimmten Städten) wurde sechsmal gemessen und die folgenden Ergebnisse wurden erhalten (gemessen in Stunden, in Dezimalform):

$$x_1 = 0,97 \quad x_2 = 0,98 \quad x_3 = 0,99 \quad x_4 = 1,01 \quad x_5 = 1,00 \quad x_6 = 0,99.$$

Der Datenvektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ wird als eine Realisierung einer einfachen Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_6)$ betrachtet, deren Stichprobenvariablen normalverteilt sind.

- Geben wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95% für den Erwartungswert der Stichprobenvariablen aufgrund des obigen Datenvektors an.
- Konstruieren wir einen Hypothesentest zum Fehlniveau $\varepsilon = 0,02$, um zu entscheiden, ob der Erwartungswert der Stichprobenvariablen gleich 1 Stunde ist. Stellen wir eine der Situation entsprechende Nullhypothese H_0 und die zugehörige Alternativhypothese H_1 auf, und berechnen wir den Wert der Teststatistik. Entscheiden wir, ob H_0 angenommen oder verworfen werden muss, und begründen wir die Entscheidung.
- Geben wir den Wert der zur obigen Realisierung gehörigen empirischen Verteilungsfunktion an der Stelle $t = 0,995$ an. (Begründen wir die Antwort.)

*6. Sei $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ein zweidimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Seien noch $U = X + Y$ und $V = X - Y$.

- Bestimmen wir den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.
- Aufgrund des Ergebnisses des vorigen Teiles geben wir die Regression $\mathbb{E}(V|U)$ an.

Verteilung	Notation	ranX	$F_X(t)$	$f_X(k), f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1 - p, p$	p	$p(1 - p)$
Binomialverteilung	$\text{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Poisson-Verteilung	$\text{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\text{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\text{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t} \ (0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	$N(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n -dim. Normalverteilung	$N(\underline{\mu}; \Sigma)$	$\mathbb{R}^n$	$f_X(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T \Sigma^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	Σ