

1. Prüfung

Lösungen

1. Beantworten wir die folgenden Fragen aufgrund der in der Vorlesung angegebenen Behauptungen und Definitionen.

- (a) Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$. Wie wurde der Wert der Verteilungsfunktion von X an der Stelle t definiert? (Nur die definierende Formel ist gefragt, es ist nicht nötig, die Bedeutung der in der Definition auftretenden Ausdrücke anzugeben.)
- (b) Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Funktion. Welche Eigenschaften muss F haben, damit eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F existiert?

Megolds:

- (a) (6 pont)

(0 pont) Jellse: $F_X(t)$.

(6 pont) rtke: $\mathbb{P}(X \leq t)$.

($\mathbb{P}(X < t)$ -re 4 pont.)

- (b) (14 pont)

(4 pont) Ha F jobbrl folytonos (nem kell képlettel kirni, de ha kirja képlettel, az jó, bármilyen értelmes és azonosítható jelölés OK a jobb oldali határértékre),

(4 pont) monoton növő (nem kell odarni, hogy nem feltétlenül szigorúan. Ha viszont azt írja, hogy szigorúan, akkor max. 1 pont),

(3 pont) $F(t)$ határértéke $t \rightarrow -\infty$ esetén 0

(3 pont) s $t \rightarrow \infty$ esetén 1.

2. Es gibt vier Kugeln Eis übrig vor Schlieung in einer Konditorei. Zwei Teenager, Stephan und Thomas, kommen unabhängig voneinander, beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in die Konditorei, bevor sie schließt. Falls nur einer von ihnen dorthin geht, kauft er 3 Kugeln Eis. Falls beide dorthin gehen, dann teilen sie sich brüderlich und kaufen zwei-zwei Kugeln Eis. (Wer nicht dorthin geht, kauft natürlich kein Eis.) Bezeichnen wir mit S (bzw. T) die Anzahl der Kugeln, die Stephan (bzw. Thomas) kauft.

- (a) Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung von S und T . Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S = k, T = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).

(Die Lösung von Teil (a) muss ausnahmsweise nicht begründet werden.)

- (b) Bestimmen wir die Randverteilungen von S und T .

- (c) Bestimmen wir die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient von S und T .

- (d) Sind S und T unabhängig?

Megolds:

$\begin{smallmatrix} S \\ T \end{smallmatrix}$	0	2	3	f_T
0	1/4	0	1/4	1/2
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	0	1/4
f_S	1/2	1/4	1/4	(1)

- (a) (4 pont)

(4 pont) Tkletes együttes eloszls tblzat. Nem tkletes megolds esetén: ha minden 0 helyn 0 ll, akkor arra jr 1 pont (akkor is, ha esetleg más helyen is 0-k állnak, ahol nem azoknak kellene állniuk), a többi értékre jár 3 pont, minden hiba esetén -1 pont (persze az összpontszám nem mehet

negatívba), súlyos elvi hiba (a táblázatban negatív vagy 1-nél nagyobb számok is szerepelnek) esetén az egész (a) rész 0 pont.

(Indoklás: ha sem Sándor, sem Tamás nem megy el a fagyizóba, akkor $S = T = 0$. Ha csak Sándor megy, akkor $S = 3, T = 0$, ha pedig csak Tamás, akkor $S = 0, T = 3$. Végül ha mindketten mennek, akkor $S = T = 2$. És minden lehetséges kimenetel valószínűsége $(1/2)^2 = 1/4$.)

(b) (2 pont)

(1 pont) Az S peremeloszlását az együttes táblázat megfelelő oszlopösszegei adják: $\mathbb{P}(S = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(S = 3) = \frac{1}{4}$. Ez az egy pont csak akkor jár, ha (az adott táblázathoz képest) a számszerű értékek is jók.

(1 pont) T peremeloszlása ugyanaz, mint S -é.

Külön indoklás itt nem kell.

Ha felcseréli S és T szerepét (f_S -t írja a sorokhoz és f_T -t az oszlopokhoz, pedig S és T úgy szerepel, ahogy a mintamegoldásban van), akkor max. 1 pont (akkor sem 2 pont, ha a táblázat történetesen helyes, mert nem szimmetrikus táblázatnál ez nem lenne jó megoldás).

(c) (13 pont)

(1 pont) $\text{cov}(S, T) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T)$ (meg lehet határozni definíció szerint is, ezt nem részletezzük).

(2 pont) Valahogyan meghatározza, hogy $\mathbb{E}(ST) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 1$, ebből 1 pont az indoklás. Vagy meghatározza ST eloszlását, illetve az egyetlen nem 0 érték valószínűségét:

$$\mathbb{P}(ST = 4) = \mathbb{P}(S = T = 2) = \frac{1}{4},$$

vagy a transzformált várható értékére vonatkozó képlettel számol:

$$\mathbb{E}(ST) = \sum_{k \in \text{Ran}(S)} \sum_{\ell \in \text{Ran}(T)} k\ell \mathbb{P}(S = k, T = \ell) = 2 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(S = T = 2).$$

(1 pont) $\mathbb{E}(S) = 2 \cdot \mathbb{P}(S = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(S = 3) (+ 0 \cdot \mathbb{P}(S = 0))$ (ez az 1 pont akkor is jár, ha a várható érték általános képletét írja fel helyesen).

$$(1 \text{ pont}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

(1 pont) $\mathbb{E}(T) = \frac{5}{4}$: vagy kiszámolja ugyanígy, vagy arra hivatkozik, hogy S és T azonos eloszlásúak (vagy a szimmetriára hivatkozik). Itt kivételesen nem jár pont az indoklásra, elég a helyes végeredmény.

$$(0 \text{ pont}) \text{ Tehát } \text{cov}(S, T) = 1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{9}{16}.$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ corr}(S, T) = \frac{\text{cov}(S, T)}{\mathbb{D}(S)\mathbb{D}(T)}.$$

(1 pont) $\mathbb{D}(S) = \sqrt{\mathbb{D}^2(S)} = \sqrt{\mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2}$. (Ez a pont csak akkor jár, ha mindkét azonosság megvan.)

$$(1+1 \text{ pont}) \mathbb{E}(S^2) = 2^2 \mathbb{P}(S = 2) + 3^2 \mathbb{P}(S = 3) = \frac{13}{4}.$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ Tehát } \mathbb{D}(S) = \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{27}{16}}.$$

(1 pont) $\mathbb{D}(T) = \sqrt{\frac{27}{16}}$ a szimmetria miatt (vagy ugyanígy kiszámolja).

$$(1 \text{ pont}) \text{ Így } \text{corr}(S, T) = \frac{-\frac{9}{16}}{\frac{27}{16}} = -\frac{1}{3}.$$

(d) (1 pont)

(1 pont) Nem függetlenek, mert a kovarianciájuk (vagy a korrelációjuk) nem 0.

Vagy: nem függetlenek, mert pl. $0 \neq \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 3) \neq \mathbb{P}(X = Y = 3) = 0$.

Helyes indoklás nélkül nem jár a pont.

3. Es gibt 50 Klassenräume (nummeriert von 1 bis 50) in einer Schule, die viele digitale Hilfsmittel besitzt. In einem bestimmten Zeitpunkt überprüfen wir, wie viele HDMI-Kabel sich in jedem Raum befinden. Sei X_i die Anzahl der HDMI-Kabel im Raum i , und nehmen wir an, dass die Variablen $X_1, \dots, X_{50}$ gemeinsam unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 2$ sind.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es gerade zwei HDMI-Kabel in diesem Zeitpunkt im Raum 1 gibt?
 - Sei Y die Anzahl der Räume, in denen es gerade zwei HDMI-Kabel im bestimmten Zeitpunkt gibt. Geben wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y an. (Begründen wir die Antwort!)
 - Schätzen wir durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y \geq 13)$. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit ist im Teil (c) nicht nötig, benutzen wir die Tabelle der Standardnormalverteilung zur Approximation.)

Megoldás:

(a) (3 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ (1 pont) $= (\lambda^2/2)e^{-\lambda} = 2e^{-2}$ (ezért az 1 pontért elég a kettőből az egyik alak)(1 pont) $\approx 0,2707$.

(b) (7 pont)

(1 pont) Y binomiális eloszlású,

(1+1+1 pont) amelynek paraméterei $n = 50$ (mert ennyi kísérletet végzünk/ennyi terem van) és $p = 2e^{-2}$ (mert ilyen valószínűséggel sikeres egymástól függetlenül minden kísérlet/ilyen valószínűséggel van egy teremben pontosan 2 HDMI-kábel, a többi teremtől függetlenül). A kétfajta megfogalmazásból az egyik is elég az indoklásra járó 1 ponthoz, a másik 2 pont indoklás nélkül is jár. Ha csak a függetlenség hiányzik az indoklásból, azért ne vonjuk le ezt az 1 pontot.

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y) = np = 13,535$ (13,5335 jön ki, ha nem az előzőleg kerekített értékkel dolgozunk)

(2 pont) és $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 3,1418$ (a 3,1417 a pontos érték, ha nem a korábban kerekített értékkel dolgozunk). Itt egy pont jár a szórásnégyzet képletére plusz a gyökvonásra, egy pedig a számolásra.

Alternatív megoldás: Y 50 darab független, azonos eloszlású indikátorok összege, amelyek paramétere a fenti p ; indikátorváltozó minden momentuma p , ebből jön ki a várható érték linearitása és a szórásnégyzet azonosságai (ezeket legalább egy kicsit részletezni kell) alapján az eredmény. Ha nem írja, hogy binomiális, akkor a (c)-ben rendes CHT kell, különben minimum 1 pont levonás!

(c) (10 pont)

(3 pont) Sztenderdizálunk: $\mathbb{P}(Y \geq 13) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \geq \frac{13 - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)}\right)$ (1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 13,5335}{3,1417} \geq \frac{13 - 13,5335}{3,1417}\right),$ (1 pont) $\approx \mathbb{P}\left(\frac{Y - 13,5335}{3,1417} \geq -0,1698\right).$

(1 pont) Ez de Moivre–Laplace-tétel miatt (vagy: a centrális határeloszlás-tétel/CHT miatt)

(1 pont) közelítőleg $1 - \Phi(-0,1698)$, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye,(1 pont) ami közelítőleg $\approx 1 - \Phi(-0,17)$ (az előző lépéssel összevonható)(1 pont) ami pedig $= \Phi(0,17)$,

(1 pont) ami közelítőleg 0,5675.

4. Seien $X \sim \text{Geo}(1/3)$ und $Y \sim \text{Exp}(4)$ unabhängige Zufallsvariablen. Geben wir die Regression $\mathbb{E}(\cos(X)Y + XY^2 - 6X^2 + 5|X)$ an.

Megoldás:

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{E}(\cos(X)Y + XY^2 + 6X^2|X) = \mathbb{E}(\cos(X)Y|X) + \mathbb{E}(XY^2|X) + \mathbb{E}(-6X^2|X) + \mathbb{E}(5|X)$$

(2 pont) a regresszió (vagy: a **feltételes** várható érték) linearitása miatt.

Ha csak annyit ír, hogy a linearitás miatt, akkor a 2 pont akkor jár, ha kiderül, hogy jól alkalmazza a regresszió linearitását, különben 0 pont. Ha azt írja, hogy a várható érték linearitása miatt, akkor max. 1 pont (akkor is, ha a feladat jól folytatódik). Ha általános képlettel fejezi ki a megfelelő linearitást, az OK.

$$(1+1 \text{ pont}) = \mathbb{E}(\cos(X)Y|X) + \mathbb{E}(XY^2|X) - 6\mathbb{E}(X^2|X) + 5 \text{ (nem kell további indoklás és összevonható az előző lépéssel is)}$$

$$(3 \text{ pont}) = \cos(X)\mathbb{E}(Y|X) + X\mathbb{E}(Y^2|X) - 6X^2 + 5, \text{ (a } 6X^2\text{-et nem muszáj } 6X^2\mathbb{E}(1|X)\text{-ként felírni, szintén összevonható az előző lépéssel, de külön indoklás kell)}$$

(2 pont) mert... (hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára)

$$(2 \text{ pont}) = \cos(X)\mathbb{E}(Y) + X\mathbb{E}(Y^2) - 6X^2 + 5,$$

(2 pont) mert X és Y függetlenek (nem kell részletezni, hogy ha Y független X -től, akkor Y^2 is az).

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{E}(Y) \left(= \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{4} \text{ (nem kell indokolni)}$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ és } \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \text{ (itt a pont a helyes szórásnégyzetre jár, } \frac{1}{\lambda^2} \text{ formában is OK megadni)}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ Tehát a keresett regresszió } \frac{1}{4}\cos(X) + \frac{1}{8}X - 6X^2 + 5.$$

Ha egy adott fajta indoklás legalább egyszer jól szerepel, de nem írja oda, hogy máskor is ezt kell használni, viszont máskor is mindig jól csinálja, akkor ne vonjunk le pontot. Ha nem mindig jól csinálja és az indoklás is hiányzik, akkor az indoklásból is -1 pont.

5. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eine (einfache) Stichprobe vom Umfang $n \in \mathbb{N}^+$, wo die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Variablen X_i an der Stelle $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta \in (0; 1)$ durch $f_\vartheta(k) = \mathbb{P}_\vartheta(X_i = k) = (k-1)\vartheta^2(1-\vartheta)^{k-2}$ angegeben ist.

(a) Bestimmen wir die Likelihood-Funktion $L_\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ für jede Realisierung $(x_1, \dots, x_n)$ der Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$.

(b) Geben wir die Maximum-Likelihood-Schätzung (aufgrund der Stichprobe) für ϑ an.

Um die maximale Punktzahl zu erhalten, muss nicht geprüft werden, ob an der Grenze des Parameterbereichs eine Maximalstelle liegen kann.

Megoldás:

(a) (4 pont)

$$(2 \text{ pont}) \text{ (Definíció szerint) } L_\vartheta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i)$$

$$(1 \text{ pont}) = \prod_{i=1}^n (x_i - 1)\vartheta^2(1 - \vartheta)^{x_i - 2}$$

$$(1 \text{ pont}) = \vartheta^{2n} \prod_{i=1}^n ((x_i - 1)(1 - \vartheta)^{x_i - 2}) = \vartheta^{2n} \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \prod_{i=1}^n (1 - \vartheta)^{x_i - 2}.$$

(b) (16 pont)

(1 pont) arra az ötletre, hogy meg kell határozni a log-likelihood-függvényt (akkor is, ha az nem is igazán sikerül).

$$(1 \text{ pont}) \text{ A log-likelihood-függvény } l_\vartheta(x_1, \dots, x_n) = \ln L_\vartheta(x_1, \dots, x_n)$$

$$(1+1+1 \text{ pont}) = 2n \ln \vartheta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i - 1) + \sum_{i=1}^n (x_i - 2) \ln(1 - \vartheta).$$

(1 pont) A log-likelihood függvényt ϑ szerint deriváljuk és megnézzük, hogy hol 0 a derivált. (Ez a pont akkor is jár, ha a deriválás esetleg nem igazán szerepel, feltéve, hogy az is megvan, hogy a deriváltat egyenlővé tesszük 0-val.)

$$(1+1 \text{ pont}) \frac{\partial}{\partial \vartheta} l_{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{2n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - 2}{1 - \vartheta},$$

(1+2 pont) ez pontosan akkor 0, ha $\vartheta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{x}_n}$ (Ebből két pont a részletszámításokra jár és egy a helyes végeredményre, utóbbi akár indoklás nélkül is, ha jó volt a deriválás. Részletszámítások pl.: a $\frac{2n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - 2}{1 - \vartheta} = 0$ egyenlet jobb oldalára átviszi a szummát és beszorozza mindkét oldalt $\vartheta(1 - \vartheta)$ -val (1 pont), majd felbontja a zárójeleket és ϑ -t kifejezi (1 pont).).

$$(1+1 \text{ pont}) \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} l_{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{2n}{\vartheta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - 2}{(1 - \vartheta)^2}$$

(1 pont) ami minden pontban (vagy: a $\frac{2}{\bar{x}_n}$ pontban) kisebb, mint 0,

(1 pont) így $\vartheta = \frac{2}{\bar{x}_n}$ -ban valóban szigorú lokális maximum van (ezért az 1 pontért elég, ha azt írja, hogy lokális maximum, sőt az is, ha azt írja, hogy maximum).

(1 pont) Így tehát az adott realizációra vonatkozó maximum likelihood becslés $\vartheta_*(x_1, \dots, x_n) = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{x}_n}$ és így a maximum likelihood becslés $\vartheta_*(X_1, \dots, X_n) = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2}{\bar{X}_n}$. (Ha bármelyik forma szerepel, akkor jár a pont.)

*6. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X is

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \frac{t^2}{4}, & \text{falls } 0 \leq t < 2, \\ 1, & \text{falls } t \geq 2, \end{cases}$$

und falls der Wert von X bekannt ist, dann ist die Variable Y uniformverteilt auf dem Intervall $(0; 2/X)$. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y \leq 1)$.

Első megoldás:

(1 pont) Meghatározzuk X sűrűségfüggvényét, amit úgy kapunk meg, hogy F_X -et deriváljuk, ahol pedig F_X nem differenciálható, ott legyen 0 (vagy bármilyen pozitív szám). Elég, ha ez impliciten derül ki, és akkor is jár ez a pont, ha csak azzal a résszel foglalkozik, ahol nem 0 a sűrűségfüggvény, vagy ha nem veszi észre, hogy a szakaszhatárokon nem differenciálható. De ha nem jó a derivált, akkor ez a pont sem jár.

(1+1 pont) Vagyis

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{ha } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Innen 1. megoldás, folytonos TVT-vel.

(2 pont) A folytonos TVT (teljes valószínűség tétele folytonos esetben) szerint

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{P}(Y \leq 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq 1 | X = s) f_X(s) ds$$

(2 pont) $= \int_0^2 \frac{t}{2} \mathbb{P}(Y \leq 1 | X = s) ds$ (az előző lépéssel összevonható, ha kiderül, hogy a folytonos TVT-nek megfelelő képletet használ).

(2 pont) Ha $\frac{1}{s} \leq 1$, vagyis $s \geq 1$, akkor $\mathbb{P}(Y \leq 1 | X = s) = 1$ (mivel Y mindig 0 és $1/X$ közé esik, de bővebb indoklás nem kell).

(2 pont) Ha $\frac{1}{s} > 1$, vagyis $s < 1$, akkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 1 | X = s) = \frac{1}{1/s} = s,$$

(2 pont) mert $X = s$ ismeretében Y egyenletes eloszlású $(0; 1/s)$ -en (tehát ez alapján a feltételes eloszlásfüggvény $F_{Y|X}(1|s) = \frac{1-0}{1/s-0}$, de ezt nem muszáj így felírni); vagy ugyanez feltételes sűrűségfüggvénnyel megfogalmazva: $f_{Y|X}(t|s) = \frac{1}{1/s} = s$ ilyen s -re, ha $0 < t < 1/s$ és 0 egyébként; vagy egydimenziós geometriai valószínűségi mezővel (kedvező terület: 1, összes: $1/s$) érvelve.

(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y \leq 1) = \int_0^1 \frac{s^2}{2} ds + \int_1^2 \frac{s}{2} ds$

$$(2 \text{ pont}) = \left[\frac{s^3}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{s^2}{4} \right]_1^2$$

$$(2 \text{ pont}) = \frac{1}{6} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}.$$

Második megoldás:

Az első 3 pont ugyanaz, mint az előző megoldásban.

(1 pont) $\mathbb{P}(Y \leq 1) = F_Y(1)$

$$(1 \text{ pont}) = \int_{-\infty}^1 f_Y(t) dt$$

$$(1 \text{ pont}) = \int_0^1 f_Y(t) dt$$

$$(1 \text{ pont}) f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds,$$

(1 pont) ahol $f_{X,Y}(s, t) = f_X(s)f_{Y|X}(t|s)$.

További pontokért a konkrét számolások:

(2 pont) $f_{Y|X}(t|s) = \frac{1}{1/s} = s$, ha $0 < s < 2$ és $0 < t < 1/s$, és $f_{Y|X}(t|s) = 0$ egyébként. (Ha nem írja oda, hogy hol 0 a feltételes sűrűségfüggvény, de a későbbiekben úgy számol, hogy abból kiderül, akkor ne vonjunk le ebből a 2 pontból.)

(1 pont) tehát $f_{X,Y}(s, t) = \frac{s^2}{2}$, ha $0 < s < 2$ és $0 < t < 1/s$,

(1 pont) és $f_{X,Y}(s, t) = 0$ egyébként.

(1+1 pont) A $0 < s < 2$ és $0 < t < 1/s$ feltétel alapján ha t adott, akkor s lehetséges értékei 0 és $1/t$ között lehetnek. Ha $t \leq 1/2$, akkor ez azt jelenti, hogy s minden lehetséges értéke (0-tól 2-ig) előfordulhat. (Elég, ha ezek az integrálási határokból, impliciten derülnek ki.)

(1+1 pont) $f_Y(t) = \int_0^{1/t} \frac{s^2}{2} ds = \left[\frac{s^3}{6} \right]_0^{1/t} = \frac{1}{6t^3}$, ha $t > 1/2$ (Ebből 1 pont jár a számolásra és 1 a végeredményre.)

(1+1 pont) és $f_Y(t) = \int_0^2 \frac{s^2}{2} ds = \left[\frac{s^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$, ha $0 < t \leq 1/2$.

(0 pont) Ha $t \leq 0$, akkor $f_Y(t) = 0$.

(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \frac{4}{3} dt + \int_{1/2}^1 \frac{1}{6t^3} dt = \frac{2}{3} + \left[-\frac{1}{12t^2} \right]_{t=1/2}^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$.

Természetesen az is jó, ha nem f_Y -t határozza meg, hanem úgy számol, hogy

$$\mathbb{P}(Y < 1) = F_Y(1) = \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Ennek felírására jár az alternatív megoldás első két pontja helyett 2 pont. Az utolsó 8 pont pedig a megfelelő integrálási határok meghatározására és az integrálás elvégzésére (az alternatív megoldás utolsó 8 pontjához hasonlóan).