

Klausur (Zárthelyi dolgozat)

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Zwei Zahlen werden nacheinander unabhängig im Intervall $[0; 1]$ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste ausgewählte Zahl größer als die zweite Zahl ist, und zusätzlich die erste Zahl kleiner als 0,75, während die zweite Zahl größer als 0,5 ist?

Megoldás:

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0; 1] \times [0; 1]$ négyzetben.

(1 pont) Ez az Ω eseménytér.

(3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\Omega}}$. (T_{Ω} helyett $T_{\text{összes}}$ vagy hasonló is jó.)

(1 pont) $T_{\Omega} = 1$ (indoklás nélkül is OK).

(4 pont) (x, y) -nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $0,5 < y < x < 0,75$.

(Ha nincs meg mind a három egyenlőtlenség, de kettő jó, akkor 2 pont, ha csak egy jó, akkor 1 pont. Ne vonjunk le pontot, ha nem szigorú egyenlőtlenségeket ír.)

(3 pont) jó ábra

(2 pont) A kedvező terület tehát a négyzetnek az $y = x$, $y = 0,5$ és $x = 0,75$ egyenletű egyenesek közötti része (elég, ha ez az ábráról derül ki, pl. besatírozza a kedvező területet).

(1 pont) Ez egy derékszögű egyenlőszárú háromszög 0,25 hosszú befogókkal,

(2 pont) tehát a területe $\frac{0,25 \cdot 0,25}{2} = 0,03125 = \frac{1}{32}$.

(Lehet másra is hivatkozni, pl. a kedvező terület egy bizonyos négyzet területének fele stb.)

(1 pont) Tehát a keresett valószínűség is 0,03125 (ha egyértelmű, hogy ezt a számot szánja végeredménynek, akkor ne vonjunk le pontot, ha nem hangsúlyozza, hogy le kell osztani az összes területtel, vagyis 1-gyel).

Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω , de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és nem csak véletlenül jön ki neki 1 megoldásként), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni.

Ezen belül konkrétan: ha nem rajzol ábrát, de nemcsak a $0,5 < y < x < 0,75$ egyenlőtlenséglánc van meg (amire fent külön járt pont), hanem az is, hogy geometriailag hogy néz ki/hogy számolható ki a kedvező terület, akkor helyes számolási mód (nem pusztán helyes végeredmény!) esetén elfogadható az ábra hiányában is annak megnevezése, hogy a kedvező terület egy derékszögű egyenlőszárú háromszög. Hibás számolás esetén azonban az ábrára adandó pontszám is elvész.

2. Nehmen wir an, dass die Ereignisse A , B und C paarweise unabhängig sind (d.h.: beliebige zwei von ihnen unabhängig sind), und dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$ gilt. Sei noch $\frac{1}{9}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der obigen drei Ereignisse eintritt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Ereignisse eintreten? Sind A , B und C gemeinsam unabhängig?

Figyelem! A feleadat rosszul lett kitűzve, bár a számolások elvégezhetők, de a megadott valószínűségek ilyen formában nem fordulhatnak elő (mert $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > \mathbb{P}(A \cap C)$ adódik). Ha valaki ezt a hármas metszet valószínűségének kiszámítása után (vagy máshogy) észreveszi, akkor a függetlenség ellenőrzéséért járó pontszámot automatikusan megkapja. Ha valaki végigcsinálja mechanikusan a számolásokat, azt az alábbi útmutató szerint pontozzuk.

Megoldás. (13 pont az első, 7 a második kérdésre)

(1 pont) A feladat első részében a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(2 pont) A feladat szerint $\frac{1}{9} = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ (a két lépés összevonható pontlevonás nélkül),

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{8}{9}$ (ez az 1 pont akkor is jár, ha csak a későbbiekben derül ki, hogy ezzel számol).

(2 pont) A függetlenségek/páronkénti függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$ (ha nem írja ki, hogy a páronkénti függetlenség miatt, de az megvan, hogy a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata, akkor ne vonjunk le pontot. De ha nem szerepel itt mind a három egyenlőtlenség és később sem derül ki, hogy mind igaz, akkor max. 1 pont),

(1 pont) tehát mindhárom kettes metszet valószínűsége $\frac{1}{9}$.

(1 pont) A Poincaré-formula szerint

$$(0 \text{ pont}) \quad \frac{8}{9} =$$

(3 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(1 pont) $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ (ha nem írja ki ennyire részletesen a számokat, de kijön egy helyes numerikus eredmény és korábban már szerepeltek az egyes valószínűségek, az rendben van),

(1 pont) amiből $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{9}$.

(3 pont) Az együttes függetlenséghez elég azt ellenőrizni, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$ teljesül-e (ha ez csak impliciten derül ki, de megemlíti az egyenlet mindkét oldalát, akkor ebből jár 2 pont, és ha világos, hogy azt nézi meg, hogy egyenlőek-e, akkor 3 pont jár),

(1 pont) mivel azt tudjuk, hogy páronként függetlenek (vagy: mivel tudjuk, hogy a kettes metszetekre teljesül a függetlenség definíciója; ezt persze egyesével is ki lehet fejezni).

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

$$(0 \text{ pont}) \text{ és láttuk, hogy } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{9},$$

(1 pont) tehát nem együttesen függetlenek (az is jó, ha azt írja, hogy „nem függetlenek”).

A feladatnak ebben a részében nem adható részpontszám arra, ha úgy tippeli be, hogy nem együttesen függetlenek, hogy nem jelenik meg a megoldásban A, B és C (vagy esetleg a komplementereik) hármas metszete.

Lehetséges további jó megoldás pl.: megnézi, hogy $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ megegyezik-e $\mathbb{P}(\overline{A}) \mathbb{P}(\overline{B}) \mathbb{P}(\overline{C})$ -vel (ami ekvivalens a hármas metszetre vonatkozó feltétellel, mert ha A, B, C páronként függetlenek, akkor $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ is azok). Ekkor nem kell $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ értéke, mert $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1/9$ a feladat szerint és $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Jó úgy is, hogy kiszámolja pl. $\mathbb{P}(C|A \cap B)$ -t és kijön neki, hogy ez nem $\mathbb{P}(C)$, ezért C nem lehet független $A \cap B$ -től és így az együttes függetlenség sem teljesülhet.

Ilyen megoldásoknál a teljes pontszámhoz kell az itt megadott teljes indoklás (ami bővebb, mint a standard megoldás esetén).

3. Ein Unternehmen besitzt zwei Büros, eines in Prag, wo eine Hälfte der Mitarbeiter/innen arbeitet, und das andere in Istanbul, wo die andere Hälfte arbeitet. Das Lieblingsgetränk eines Drittels der Mitarbeiter/innen im Prager Büro ist Kaffee, ein anderes Drittel dieser Mitarbeiter/innen bevorzugt Mineralwasser, und das letzte Drittel bevorzugt Bier. Das Lieblingsgetränk der Hälfte der Mitarbeiter/innen im Istanbul Büro ist auch Kaffee, die andere Hälfte bevorzugt dort Tee. (Jeder Mitarbeiter/jede Mitarbeiterin hat genau ein Lieblingsgetränk, das in der obigen Liste enthalten ist.)

Ein(e) Mitarbeiter(in) des Unternehmens wird uniform zufällig gewählt.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person Kaffee ist?
- Angenommen, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person Kaffee ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er/sie in Istanbul arbeitet?
- Angenommen, dass das Lieblingsgetränk der ausgewählten Person *nicht* Kaffee ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein/ihr Lieblingsgetränk Bier ist?

Megoldás:

Megjegyzés: Ez egy viszonylag hosszú feladat 20 pontért (ellentétben pl. az 1. és a 2. feladatban), ezért bizonyos lépésekre, amikért más feladatban külön-külön is járhatna pont, itt csak összevonva jár.

(0 pont) Jelölje K azt az eseményt, hogy a kiválasztott dolgozó kedvenc itala a kávé, S azt, hogy a sör (a többi italra nem lesz szükségünk külön-külön), P azt, hogy a kiválasztott dolgozó Prágában dolgozik és I azt, hogy Isztambulban.

(a) (9 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(K)$ (elég, ha ez impliciten derül ki).

(1 pont) A P és I események teljes eseményrendszert alkotnak,

(1 pont) mert egymás komplementerei (ehelyett az is jó, ha ellenőrzi, hogy kizáróak és az uniójuk Ω ; ha az egyik eseményt eleve a másik komplementereként jelöli és úgy mondja ki, hogy teljes eseményrendszert alkotnak, akkor további indoklás nélkül is jár a pont).

(1 pont) A feladat szerint $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(I) = 1/2$

(1 pont) és $\mathbb{P}(K|P) = 1/3$, $\mathbb{P}(K|I) = 1/2$,

(1 pont) így a teljes valószínűség tétele (elég: TVT) szerint

(2 pont) $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(P) \mathbb{P}(K|P) + \mathbb{P}(I) \mathbb{P}(K|I)$.

$$(0 \text{ pont}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{5}{12}.$$

(b) (5 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(I|K)$.

(1 pont) Bayes-tétellel (ez a pont a tétel megnevezésére jár)

(1 pont) $\mathbb{P}(I|K) = \frac{\mathbb{P}(K|I) \mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(K)}$ (természetesen az is jó, ha itt a nevezőre újra felírja a TVT-s képletet)

(1 pont) $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}$ (az (a) feladat alapján, tehát nem kell indokolni)

$$(1 \text{ pont}) = \frac{3}{5}.$$

Nem tilos a Bayes-tétel használata nélkül kiszámolni $\mathbb{P}(I|K)$ -t. Ekkor valahogy ki kell számolni $\mathbb{P}(I \cap K)$ -t, aminél lehet a szorzási szabályra hivatkozni vagy a feltételes valószínűség definíciója alapján (amire nem muszáj hivatkozni) újra levezetni a szorzási szabálynak megfelelő számítást. Ilyen esetben a Bayes-tételre való hivatkozás helyett a szorzási szabályra való hivatkozásra, illetve ilyen hivatkozás hiányában a (konkrét példában) a szorzási szabálynak megfelelő számítás levezetésére jár az 1 pont.

(c) (6 pont)

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(S|\bar{K}) = \frac{\mathbb{P}(S \cap \bar{K})}{\mathbb{P}(\bar{K})}$.

(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{K}) = 1 - \mathbb{P}(K) = \frac{7}{12}$ (az (a) feladat alapján, tehát nem kell rá hivatkozni),

(1 pont) $= \frac{\mathbb{P}(S)}{7/12}$. (Elég, ha impliciten derül ki, hogy $S \cap \bar{K}$ ugyanaz, mint S , és az is OK, ha eleve S -sel kezdi $S \cap \bar{K}$ helyett.)

(1 pont) $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|P) \mathbb{P}(P)$ (itt most nem jár külön pont a szorzási szabályra való hivatkozásra)

$$(1 \text{ pont}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ vagyis } \mathbb{P}(S|\bar{K}) = \frac{1/6}{7/12} = \frac{2}{7}.$$

4. In einem Gebäude gibt es vier Aufzüge. Jeden Tag funktioniert jeder Aufzug mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, unabhängig von den anderen Aufzügen und unabhängig von den Konditionen aller Aufzüge an anderen Tagen.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Aufzüge an einem bestimmten Tag *nicht* funktionieren?

(b) Von einem bestimmten Tag an beobachten wir jeden Tag, welche Aufzüge an welchen Tagen funktionieren. Sei Y die Anzahl der Tage (einschließlich des letzten Tages) vom Anfang der Beobachtung bis zum ersten solchen Tag, wenn kein Aufzug in Betrieb ist.

i. Geben wir die Verteilung von Y an, und wenn sie zu den gelernten bekannten Verteilungen gehört, geben wir auch ihre Parameter an.

(Diese Antwort muss ausnahmsweise nicht begründet werden.)

ii. Bestimmen wir die Standardabweichung von Y und den Erwartungswert von Y^2 .

iii. Bestimmen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 2024 | Y > 2022)$.

Megoldás:

(a) (7 pont)

(1 pont) A nem működő liftek számát jelöljük X -szel, ekkor X binomiális eloszlású (itt az indoklásra nem jár külön pont)

(1 pont) $n = 4$ és $p = 1/2$ paraméterrel.

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X \leq 2)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$

(2 pont) $= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (a $\binom{4}{0}$ elhagyható és a $\binom{4}{1}$ helyett

jó az is, hogy 4, a $\binom{4}{2}$ helyett az, hogy $\frac{4 \cdot 3}{2}$, és ha azt írja, hogy 6, jelöljük meg, hogy ez így hiányos, de ne vonjunk le pontot, illetve lehet minden tagnál $(1/2)^4$ -t írni),

(1 pont) $= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$ (szabad négy értékes jegyre kerekíteni és az is jó, ha eleve numerikus értékekkel számol – ha kiderül, hogy hogyan számolt, beleértve azt is, hogy $\binom{4}{2} = 6$. Elég közönséges tört alakban megadni a végeredményt.).

Természetesen lehet azt a Z val. változót is tekinteni, amelyik a működő liftek számát jelöli, ekkor $Z \sim B(4; 1/2)$ és $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = 4 - k)$, ha $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Nem kötelező a binomiális eloszlásra hivatkozni, meg lehet magyarázni kombinatorikai alapon is, hogy miért ezek a valószínűségek lesznek. Ekkor azonban kell egy megfelelő eseménytér és arra is hivatkozni kell, hogy a valószínűségi mező klasszikus (vagy: kedvező/összes képlettel számolhatunk) és el kell mondani, hogy hány eleme van; erre jár az 1+1 pont a binomiális eloszlás és paramétere helyett.

(b) (összesen 13 pont)

(i) (2 pont):

(1 pont) Y geometriai eloszlású

(1 pont) $p = (1/2)^4 = 1/16 (= 0,0625)$ paraméterrel. (Ha végig kerekített tizedestört alakokkal számol és sok/jelentős a kerekítési hiba, akkor vonjunk le 1 pontot.)

(ii) (6 pont):

(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$

(1 pont) $= \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

(1 pont) $= \sqrt{\frac{15/16}{1/16^2}} = \sqrt{15 \cdot 16} = \sqrt{240} \approx 15,4919$ (elég, ha az utóbbi kettő közül egy szerepel, és 15,5 már jó).

Ne vonjunk le pontot, ha nem írja oda az $\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$ -et általános p -re, de kiderül, hogy a konkrét p -re ezt használja. Ha azonban rossz képletbe helyettesít be és az általános képlet hiányzik, akkor az utolsó két pontból egyik sem jár.

(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$.

(1 pont) $\mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{p^2} = 16^2 = 256$,

(erre itt csak 1 pont jár, mert különben túl sok lenne, de nem baj, ha nem szerepel általános p -re az eredmény, sőt a 256 a 16^2 és az $1/p^2$ nélkül is elfogadható)

(1 pont) így $\mathbb{E}(Y^2) (= 240 + 256) = 496$.

(iii) (5 pont)

(1 pont) arra az ötletre, hogy az örökifjúságra kell hivatkozni, még ha ezt nem is sikerül megfelelően kivitelezni.

(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2024 | Y > 2022) = \mathbb{P}(Y > 2)$ (a geometriai eloszlás örökifjúsága miatt – ennek indoklására az előző pont jár)

$$(1 \text{ pont}) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) \text{ (a két lépés összevonható)}$$

$$(1 \text{ pont}) = 1 - p - p(1 - p) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} \text{ (ehhez az 1 ponthoz elég, ha csak a konkrét } p\text{-re szerepel a számolás)}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{256 - 16 - 15}{256} = \frac{225}{256} = 0,87890625 \text{ (elég négy értékes jegyre kerekítve).}$$

A végeredményeket elfogadjuk közönséges tört és tizedestört alakban is, kivéve az (ii)-nél a szórást, ahol a végeredmény irracionális szám; itt ha nincs numerikus érték, akkor -1 pont.

5. Ein Bild besteht aus 3 Pixeln in einer einzigen Zeile, die unabhängig voneinander einzeln mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ schwarz und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ weiß gefärbt wurden. Sei X die Anzahl der weißen Pixel, und sei Y die Länge der größten zusammenhängenden Sequenz von schwarzen Pixeln. (Beispielweise sind die Werte von X und Y in der unten gezeigten Situation beide 1.)



- Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung von X und Y . Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).
- Bestimmen wir die Randverteilungen von X und Y .
- Bestimmen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(XY)$.

(Alle Antworten müssen begründet werden.)

Megoldás:

- (a) (10 pont)

$Y \backslash X$	0	1	2	3	f_Y
0	0	0	0	$1/8$	$1/8$
1	0	$1/8$	$3/8$	0	$1/2$
2	0	$1/4$	0	0	$1/4$
3	$1/8$	0	0	0	$1/8$
f_X	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	(1)

(6 pont) Tökéletes együttes eloszlás (az indoklásra és a peremeloszlásokra majd később jár pont; a táblázatban szereplő nullákat csak akkor kell figyelembe venni, ha táblázatban adja meg az együttes eloszlást).

Részpontszám a következőkre adható:

- Az öt nem 0 valószínűség közül ahányat eltalált, annyi pont (akkor is, ha a többi elem nem stimmel, pl. a 0-k helyére nem mind 0-kat írt).
- Ezen felül $+1$ pont, ha az összes olyan elemre, aminek 0-nak kéne lennie, azt írja, hogy 0 (vagy ha nem táblázattal csinálja, akkor egyikről sem említi, hogy pozitív). Ennél az nem baj, ha máshova is ír 0-t.
- Ha az együttes eloszlás táblázatában szereplő számok összege nem 1, akkor viszont az eddigieken felül összesen -1 pont, ha pedig a táblázatban negatív vagy 1-nél nagyobb is szám előfordul, akkor még összesen további -1 pont (kivéve ha ezektől az (a) teljes pontszáma negatívvá válna; abban az esetben az (a)-ra 0 pont).

Az indoklásra az alábbiak szerint jár pont:

(1 pont) arra, hogy ha $X = 0$, akkor Y mindenképpen 3 kell, hogy legyen, és ha $X = 3$, akkor Y mindenképpen 0 kell, hogy legyen. (Ez még önmagában nem igazán teljes indoklás, de pont már jár érte. A rendes indoklás az, hogy ha $X = 0$, akkor nincs fehér képkocka, tehát mindhárom képkocka fehér, amelyek összefüggő területet alkotnak, így $Y = 3$. Ha pedig $X = 3$, akkor három egybefüggő fekete képkocka van, vagyis nincs fehér képkocka.) Ezt nyilván fordítva is el lehet mondani: ha $Y = 0$, abból $X = 3$, és ha $Y = 3$, abból $X = 0$ következik.

(1 pont) arra, hogy ha $X = 2$, akkor Y mindenképpen 1 kell, hogy legyen. (Ennyire is jár a pont; a rendes indoklás az, hogy ha $X = 2$, akkor egyetlen fekete képkocka van, így szükségképpen $Y = 1$.)

(2 pont) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 2/8 = 1/4$ és $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8$ megindoklására. Itt szükséges valami érdemi esetszétválasztás: ha $X = 1$, akkor ez az egy fehér képkocka vagy a kép szélén van (ennek a valószínűsége $2/8$) és ekkor a két fekete kocka egymás mellé kerül, azaz $Y = 2$ lesz, vagy a kép közepén van (ennek a valószínűsége $1/8$) és ekkor a fehér képkocka két részre vágja a fekete területet, ezért $Y = 1$ lesz.

Ha lerajzolja a lehetséges eseteket és leírja, hogy mikor mennyi X és Y értéke, az bőven elég.

(b) (4 pont)

Helyes peremeloszlások az előbbi táblázatban.

(2 pont) $f_X(k)$ -t a k -nak megfelelő oszlop összegeként kapja minden k -ra (részpontszám adható, ha ez csak részben sikerül).

(2 pont) $f_Y(\ell)$ -t a k -nek megfelelő sor összegeként kapja minden ℓ -re (részpontszám adható, ha ez csak részben sikerül).

Ezeket a pontokat akkor is megadjuk, ha hibás együttes eloszlás táblázatból számolja a peremeloszlásokat. De ha a $f_X(k)$ -k vagy a $f_Y(\ell)$ -ek összege nem 1 és ezt nem veszi észre, akkor legfeljebb 1–1 pont. Ha valamelyik peremeloszlásban negatív vagy 1-nél nagyobb $f_X(k)$ vagy $f_Y(\ell)$ értékek is megjelennek, akkor pedig arra a peremeloszlásra 0 pont.

(c) (6 pont)

1. megoldás: XY eloszlásával számolva.

(1 pont) $\text{ran}(XY) = \{0, 1, 2\}$ (ha olyan halmazt ír, ami ezt a három elemet tartalmazza és még esetleg néhány olyan elemet, amik előállnak a 0, 1, 2, 3 számok közül kettő szorzataként, azt is el lehet fogadni). Elég, ha ez a későbbiekben impliciten derül ki.

(1 pont) $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8$,

(2 pont) $\mathbb{P}(XY = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 3/8 + 1/4 = 5/8$,

(0 pont) $\mathbb{P}(XY = 0) = 1 - 1/8 - 5/8 = 1/4$.

(1 pont) Így $\mathbb{P}(XY = 0) = 1 \cdot 1/8 + 2 \cdot 5/8 (+0 \cdot 1/4)$

(1 pont) $= \frac{11}{8}$.

Ha $\mathbb{P}(XY = 0)$ jó, de semmi másra nem járna pont a (c)-ben, akkor erre lehet adni 1 pontot.

2. megoldás: eloszlástranszformáció-szerűen számolva.

(1 pont) Megadja az $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k=0}^3 \sum_{\ell=0}^3 k\ell \mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ képletet vagy valami hasonlót; a lehetetlen (k, ℓ) párokat persze nem kötelező belevenni. Elég, ha impliciten derül ki, hogy ezt a képletet használja (ha a következő konkrét képlet jó, akkor ez a pont is jár).

(3 pont) $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 2)$ (a 0-s szorzatokat is oda lehet írni, de nem kötelező)

(1 pont) $= 1/8 + 2 \cdot 3/8 + 2 \cdot 1/4$

(1 pont) $= \frac{11}{8}$.

Ha az megvan, hogy XY melyik cellákban 0, de semmi másra nem járna pont a (c)-ben, akkor erre lehet adni 1 pontot.

Ha semmi nem jön össze a megoldásból, de az legalább egyértelműen kiderül, hogy egy 8 elemű eseménytérrel van szó. És klasszikus valószínűséggel kell számolni, akkor lehet adni összesen az egész feladatra max. 2 pontot. De csak akkor, ha semmi másra nem járna pont a feladatban, és ebből a 2 pontból is levonunk 1-1 pontot a nem 0 összegekre és a negatív vagy 1-nél nagyobb valószínűségekre (úgy, hogy az összpontszám legalább 0 legyen).

- *6. Für alle $t \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ nimmt die Dichtefunktion f_X einer Zufallsvariablen X den Wert $1/t^4$ an, wo $c > 0$ eine positive reelle Zahl ist. Wir wissen weiter, dass f_X im Intervall $[-c; c]$ konstant ist, und dass f_X in jedem Punkt der Zahlmenge $\mathbb{R}$ stetig ist. Bestimmen wir den Wert von c und den Erwartungswert von X . (Ohne Beweis kann es verwendet werden, dass $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ gilt.)

Megoldás (12 pont c -re, 8 a várható értékre).

(2 pont) A folytonossághoz az kell, hogy $f_X(t) = 1/c^4$ legyen, ha $-c < t < c$. (Nem kell külön indokolni.)

(1 pont) Ahhoz, hogy f_X sűrűségfüggvény legyen, az kell, hogy f_X nemnegatív legyen (erről elég ennyit mondani, nem kell indokolni, hogy miért teljesül)

(1 pont) és teljesüljön, hogy $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt$

$$(3 \text{ pont}) = \int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{t^4} dt + \int_{-c}^c \frac{1}{c^4} dt + \int_c^{\infty} \frac{1}{t^4} dt.$$

(Ha nincs meg neki, hogy $f_X(t) = 1/c^4$, ha $-c < t < c$, de felírja ugyanezt paraméteresen a megfelelő konstanssal, akkor is jár ez a 3 pont. Részpontszám adható.)

(2 pont) $\int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{t^4} dt = \left[-\frac{1}{3} t^{-3} \right]_{-\infty}^{-c} = -\frac{1}{3} (-c)^{-3} = \frac{1}{3c^3}$ (1 a primitív függvényre, 1 az azt követő számolásra),

(1 pont) és hasonlóan $\int_c^{\infty} \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3c^3}$.

(1 pont) $\int_{-c}^c \frac{1}{c^4} dt = \frac{2c}{c^4} = \frac{2}{c^3}$.

(1 pont) Így tehát $(2 + 2 \cdot \frac{1}{3}) \frac{1}{c^3} = 1$, vagyis $c^3 = 8/3$, tehát $c = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \approx 1,3867$.

Kb. teljes megoldás a várható értékre:

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$,

(1 pont) mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ (ennyi elég, de bővebben: mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, X várható értékét értelmezzük és a fenti képlettel számolhatjuk ki).

(1 pont) $= \int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{t}{t^4} dt + \int_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{3^{4/3} t}{16} dt + \int_{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\infty} \frac{t}{t^4} dt$ (paraméteresen/korábban kapott rossz c -értékkel is OK, és az előző ponttal összevonható, tehát elég a konkrét esetre vonatkozó képlet, de ha rossz, akkor az előző pont csak akkor jár, ha az általános képlet minimális szintaktikai hibától eltekintve jó)

(1 pont) $\int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{t}{t^4} dt = \int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{1}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \right]_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} = -\frac{3^{2/3}}{8} + 0$. (Numerikusan is jó: $-\frac{3^{2/3}}{8} \approx -0,26001$.)

(1 pont) Hasonlóan adódik, hogy $\int_{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\infty} \frac{t}{t^4} dt$ pont ennek az ellentettje, tehát $\frac{3^{2/3}}{8}$.

(2 pont) Végül $\int_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} \frac{t}{c^4} dt = \left[\frac{3^{4/3} t^2}{2 \cdot 16} \right]_{-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}} = 0$.

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = 0$.

Valószínűsítjük, hogy aki meg tudja oldani ezt a feladatot, az előbb-utóbb a szimmetriára fog hivatkozni és nem fogja végigszámolni az egészet..

Ezen belül 1. lehetőség: a 3 konkrét integrál kiszámítása után jön rá, hogy a szimmetriát kell használni és 0 lesz az eredmény.

(2 pont) Az első 2 pont: mint a kb. teljes megoldásnál.

(3 pont) A szimmetria miatt 0 lesz az eredmény (ez a 3 pont további indoklás nélkül is jár, de a további pontok nem. Ha nem hivatkozik a szimmetriára sem, vagy semmi ezzel ekvivalens dologra, akkor számolás nélkül összesen max. 1 pont arra, hogy 0 lesz a várható érték.)

Alternatíva erre a 3 pontra: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f_X(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} 0 = 0$ (az utolsó előtti lépés elhagyható). Ennél a verziónál is meg kell említeni, hogy ez azért biztos, hogy jó, mert $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, amire lentebb adunk pontot.

(1 pont) Az első és a harmadik integrál egyenlő egymással, mert a 0-ra szimmetrikus intervallumokon integrálunk és az integrandus páratlan függvény/a primitív függvény páros (ezt valahogy értelmesen megfogalmazza, számolni nem kell. Ez jó úgy is, hogy a $-\infty$ -től 0-ig és 0-tól ∞ -ig terjedő részekre bontja szét az integrálást, ekkor a következő 2 pont is jár).

(1 pont) A középső integrál 0, mert szintén egy 0-ra szimmetrikus intervallumon integrálunk és az integrandus páratlan függvény/a primitív függvény páros.

(1 pont) Végül $\mathbb{E}(X)$ értelmes/létezik, mert $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

(0 pont) Így $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = 0$.

2. lehetőség: már az általános képlet felírása után észreveszi, hogy a szimmetriát lehet használni és 0 lesz az eredmény. Ekkor a szimmetriát valahogy indokolni kell, ha nem is írja fel a 3 szakaszt, pl. a legegyszerűbb itt is az, ha a $-\infty$ -től 0-ig és 0-tól ∞ -ig terjedő részekre bontja szét az integrálást.