13. Übungsblatt

Grundbegriffe der Statistik, empirische Verteilungsfunktion, Punktschätzungen, Maximum-Likelihood-Schätzung

1. $\overline{X_n} = 3$; $S_n^* = \sqrt{\frac{11}{6}} \approx 1{,}3540$; der empirische Median ist $X_7^* = 3$; die Modi sind 2, 3 und 4; $X_8^* = 3$

2. a) Das durchschnittliche Gehalt ist 437,5 Taler, der empirische Median und der Modus sind 200 Taler.
   b) Das durchschnittliche Gehalt steigt auf 625 437,5 Taler, der empirische Median und der Modus bleiben 200 Taler.

---

3. (a) $F_6^*(1) = 1/3$

   (b) Sei F die Verteilungsfunktion der Stichprobenvariablen, dann gelten $\lim_{n\to\infty} F_n^*(1) = F(1) = 1/6$, $\lim_{n\to\infty} F_n^*(3{,}5) = F(3{,}5) = 1/2$ und $\lim_{n\to\infty} F_n^*(6) = F(6) = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

4. *Skizze des Beweises:* die empirische Verteilungsfunktion ist nach Definition monoton steigend und rechtseitig stetig. Weiter, für $t \le X_1^*$ gilt $F_n^*(t) = 0$ und für $t \ge X_n^*$ gilt $F_n^*(t) = 1$, also ergibt sich $\lim_{n\to-\infty} F_n^*(t) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} F_n^*(t) = 1$, d.h.: F_n^* ist eine Verteilungsfunktion (die hängt von der Realisierung ab).
   Die Funktion F_n^* ist nie stetig, also kann eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_n^* nicht absolut stetig sein.

5. Folgt sofort aus der Behauptung auf der 61. Folie hier.

---

6. a) $\theta_n(X_1, \ldots, X_n) = 3\overline{X_n}$ b) 0,345

7. (a) $\mathbb{E}_\vartheta(1/X) = \ln(\vartheta+1) - \ln(\vartheta) = \ln\frac{\vartheta+1}{\vartheta}$; $\mathbb{D}_\vartheta^2(1/X) = \frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta+1} - \ln(\frac{\vartheta+1}{\vartheta})^2 = \frac{1}{\vartheta(\vartheta+1)} - (\ln\frac{\vartheta+1}{\vartheta})^2$.

   (b) z. B. $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ ist eine erwartungstreue und stark konsistente Schätzung

8. $\mathbb{D}_\vartheta^2(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12}$; $\mathbb{E}_\vartheta(S_n^{*2}) = \mathbb{D}_\vartheta^2(X_1) \neq \frac{(a+b)^2}{4}$, also ist $(S_n^*)^2$ nicht erwartungstreu. (Im letzten Schritt benutzten wir, dass $(a+b)^2 > (b-a)^2$ wegen $b > a > 0$ gilt.)

9. (a) (b) $c_n = \dfrac{n+1}{n}$ (c) $\dfrac{n+1}{n} X_n^*$ ist effizienter als $2\overline{X}$

---

10. $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta^n (1-\vartheta)^{\sum_{i=1}^n (x_i - 1)}$ $(x_i \in \{1, 2, \ldots\})$; $\vartheta_* = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \dfrac{1}{\overline{X}_n}$

11. $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta^{2n} (\prod_{i=1}^n x_i) \mathrm{e}^{-\vartheta \sum_{i=1}^n x_i}$ $(x_i > 0)$; $\vartheta_* = \dfrac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \dfrac{2}{\overline{X}_n}$

12. $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\vartheta-1}$ $(x_i > 1)$; $\vartheta_* = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$

    (für eine ausführliche Lösung siehe die Lösung von Aufgabe 5 hier)

*13.